เฉลยข้อสอบ PRE-TCAS’66

ชุดวิชา T433701 : คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 (A-Level)

ส่วนที่ 1 : ข้อ 1-25 ข้อละ 3 คะแนน

1. 5)	**2.** 1)	**3.** 5)	**4.** 1)	**5.** 4)	**6.** 3)	**7.** 3)	**8.** 4)	**9.** 2)	**10.** 2)
11. 1)	**12.** 1)	**13.** 5)	**14.** 3)	**15.** 5)	**16.** 2)	**17.** 2)	**18.** 4)	**19.** 3)	**20.** 4)
21. 5)	**22.** 2)	**23.** 1)	**24.** 4)	**25.** 1)					

ส่วนที่ 2 : ข้อ 26-30 ข้อละ 5 คะแนน

26. 4	**27.** 5	**28.** 0.20	**29.** 2	**30.** 3

เฉลยข้อสอบ PRE-TCAS'66

ชุดวิชา T433701 : คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 (A-Level)

ส่วนที่ 1 : ข้อ 1-25 ข้อละ 3 คะแนน

1. เฉลย 5) 5

พิจารณา A :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4|x| &= 4 \\ 3|x|^2 - 4|x| - 4 &= 0 \\ (3|x| + 2)(|x| - 2) &= 0 \\ |x| - 2 &= 0 \qquad \text{เพราะ } 3|x| + 2 > 0 \text{ เสมอ} \\ |x| &= 2 \\ x &= -2, 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A = \{-2, 2\}$

พิจารณา B :

$$\begin{aligned} |x^2 + 3x + 3| &= |2x + 3| \\ (x^2 + 3x + 3)^2 &= (2x + 3)^2 \\ (x^2 + 3x + 3)^2 - (2x + 3)^2 &= 0 \\ (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) &= 0 \\ x(x + 1)(x + 2)(x + 3) &= 0 \\ x &= 0, -1, -2, -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $B = \{-3, -2, -1, 0\}$

จาก

$$\begin{aligned} (A' \cap B')' &= A \cup B \\ &= \{-3, -2, -1, 0, 2\} \end{aligned}$$

จะได้ a = สมาชิกที่มีค่า**มากที่สุด**ของ $(A' \cap B')' = 2$

b = สมาชิกที่มีค่า**น้อยที่สุด**ของ $(A' \cap B')' = -3$

ดังนั้น

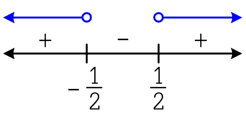
$$\begin{aligned} a - b &= 2 - (-3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

2. เฉลย 1) $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$

จาก $\exists x\left[x^2 > \frac{1}{4}\right]$ และ $\forall x[2x^2 \leq 3 - x]$

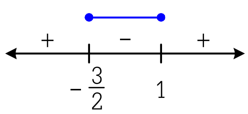
พิจารณา

$$\begin{aligned} x^2 &> \frac{1}{4} \\ 4x^2 - 1 &> 0 \\ (2x + 1)(2x - 1) &> 0 \end{aligned}$$



พิจารณา

$$\begin{aligned} 2x^2 &\leq 3 - x \\ 2x^2 + x - 3 &\leq 0 \\ (2x + 3)(x - 1) &\leq 0 \end{aligned}$$

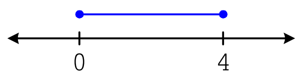


ตัวเลือก	$\exists x\left[x^2 > \frac{1}{4}\right]$	$\forall x[2x^2 \leq 3 - x]$
1)	ทำให้เป็นจริง	ทำให้เป็นจริง
2)	ทำให้เป็นจริง	ทำให้เป็นเท็จ
3)	ทำให้เป็นเท็จ	ทำให้เป็นจริง
4)	ทำให้เป็นจริง	ทำให้เป็นเท็จ
5)	ทำให้เป็นจริง	ทำให้เป็นเท็จ

ดังนั้น ตัวเลือก 1) ที่สอดคล้องกับ 2 ประโยค ซึ่งทำให้เป็นจริงทั้งคู่

3. เฉลย 5) 5 จำนวน

$$
\begin{aligned}
|x-1|\cdot|x-2| &\le |x+2| \\
|x^2-3x+2| &\le |x+2| \\
(x^2-3x+2)^2 &\le (x+2)^2 \\
(x^2-3x+2)^2-(x+2)^2 &\le 0 \\
(x^2-4x)(x^2-2x+4) &\le 0 \\
x(x-4)[(x-1)^2+3] &\le 0 \\
x(x-4) &\le 0 \quad (\because\ (x-1)^2+3>0)
\end{aligned}
$$



$$0 \le x \le 4$$

จะได้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\therefore$ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 5 จำนวน

4. เฉลย 1) $\frac{20}{3}$

พิจารณา $|x| + |x-2| \ge x+4$

กรณี $x \ge 2$;

$$
\begin{aligned}
x + x - 2 &\ge x + 4 \\
x &\ge 6
\end{aligned}
$$

จะได้ $[6, \infty)$ ...(1)

กรณี $0 \le x < 2$;

$$
\begin{aligned}
x - x + 2 &\ge x + 4 \\
-2 &\ge x
\end{aligned}
$$

จะได้ ϕ ...(2)

กรณี $x < 0$;

$$
\begin{aligned}
-x - x + 2 &\ge x + 4 \\
-2 &\ge 3x \\
x &\le -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

จะได้ $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ ...(3)

(1) $\cup$ (2) $\cup$ (3) ; $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [6, \infty)$

จะได้ $a = \frac{2}{3}$ และ $b = 6$

$$\therefore\ a + b = \frac{20}{3}$$

5. เฉลย 4) 13

จาก $f(x+2) = ax^2 + bx + c$

แทน $x = -1$;

$$
\begin{aligned}
f(-1+2) &= a(-1)^2 + b(-1) + c \\
f(1) &= a - b + c
\end{aligned}
$$

จาก $f(x-2) = x^2 + x + 1$

แทน $x = 3$;

$$
\begin{aligned}
f(3-2) &= 3^2 + 3 + 1 \\
f(1) &= 13
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ a - b + c = 13$$

6. เฉลย 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

สมมติให้ $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ และ $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$

จาก
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2) = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$$
$$\therefore\ \theta_1 - \theta_2 = 60^\circ + 360^\circ n, \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \quad ...(1)$$

จาก
$$z_1 z_2 = -1$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$$
$$\therefore\ \theta_1 + \theta_2 = 180^\circ + 360^\circ m, \text{ เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \quad ...(2)$$

(1) + (2) ;
$$2\theta_1 = 240^\circ + 360^\circ(m+n)$$
$$\theta_1 = 120^\circ + 180^\circ(m+n) \quad \text{เมื่อ } m+n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เมื่อ $0^\circ \le \theta_1, \theta_2 < 360^\circ$ จะได้ $\theta_1 = 120^\circ, \theta_2 = 60^\circ$

หรือ $\theta_1 = 300^\circ, \theta_2 = 240^\circ$

$\because$ z_1 เป็นจุดในจตุภาคที่ 4 $\therefore$ $\theta_1 = 300^\circ$

นั่นคือ
$$\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$$
$$= \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

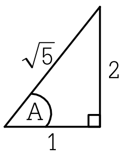
7. เฉลย 3) 0

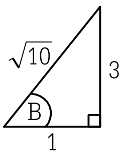
$$(\log_2 30)(\log_3 30)(\log_5 30) - (\log_2 30)(\log_3 30) - (\log_2 30)(\log_5 30) - (\log_3 30)(\log_5 30)$$
$$= (\log_2 30)(\log_3 30)(\log_5 30) - \frac{(\log 30)^2}{\log 2 \log 3} - \frac{(\log 30)^2}{\log 2 \log 5} - \frac{(\log 30)^2}{\log 3 \log 5}$$
$$= (\log_2 30)(\log_3 30)(\log_5 30) - (\log 30)^2\left[\frac{1}{\log 2 \log 3} + \frac{1}{\log 2 \log 5} + \frac{1}{\log 3 \log 5}\right]$$
$$= \frac{(\log 30)^3}{\log 2 \log 3 \log 5} - (\log 30)^2\left[\frac{\log 5 + \log 3 + \log 2}{\log 2 \log 3 \log 5}\right]$$
$$= \frac{(\log 30)^3}{\log 2 \log 3 \log 5} - \frac{(\log 30)^2(\log 30)}{\log 2 \log 3 \log 5} = 0$$

8. เฉลย 4) $\frac{5\pi}{6}$

ให้ $A = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ และ $B = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$

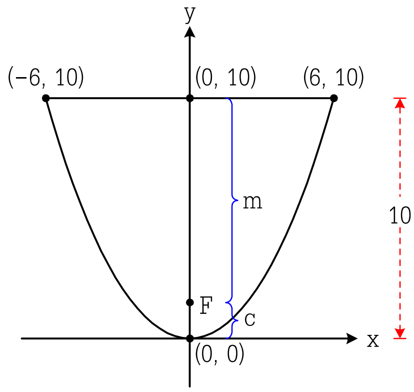




จะได้
$$\tan(A+B) = 2x+3$$
$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 2x+3$$
$$\frac{2+3}{1-2(3)} = 2x+3$$
$$-1 = 2x+3$$
$$x = -2$$
$$\therefore\ \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \arccos\left(\frac{2}{x}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(-1)$$
$$= \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

9. เฉลย 2) 9.1 เซนติเมตร

ให้จุดโฟกัส (จุด F) อยู่ต่ำกว่าระดับปากถ้วยเท่ากับ m เซนติเมตร ดังรูป



จากสมการพาราโบลา $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

แทน $h = 0,\ k = 0$; $x^2 = 4cy$

แทน $x = 6,\ y = 10$; $6^2 = 4c \cdot 10$

$$\frac{36}{40} = c$$

$$c = \frac{9}{10}$$

$$\therefore\ m = 10 - \frac{9}{10}$$

$$= 10 - 0.9 = 9.1 \text{ เซนติเมตร}$$

10. เฉลย 2) −1

จาก $x + y = k$

$$y = k - x$$

จาก $x^2 = 4y$

$$x^2 = 4(k-x)$$

$$x^2 = 4k - 4x$$

$$x^2 + 4x - 4k = 0$$

เนื่องจากกราฟสัมผัสกัน แสดงว่ามีค่า x ร่วมกัน 1 ค่า

พิจารณาจาก $b^2 - 4ac = 0$

$$4^2 - 4(1)(-4k) = 0$$

$$16 + 16k = 0$$

$$k = -1$$

11. เฉลย 1) 6

$$(1+mi)^2 = -3 + ni$$

$$1 + 2mi + m^2i^2 = -3 + ni$$

$$(1-m^2) + 2mi = -3 + ni$$

จะได้ $1 - m^2 = -3$ และ $2m = n$

$4 = m^2$ $\qquad$ $2 \cdot 2 = n$

เนื่องจาก $m > 0$ จะได้ $m = 2$ $\qquad$ $n = 4$

$$\therefore\ m + n = 2 + 4 = 6$$

12. เฉลย 1) $\frac{k^2-1}{2}$

$$\sin x + \cos x = k$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = k^2$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = k^2$$

$$1 + \sin 2x = k^2$$

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = k^2 - 1$$

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{k^2-1}{2}$$

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$= 2\sin x\cdot\cos x$$

$$= \sin 2x$$

13. เฉลย 5) 288

จาก
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$= (0-2-2)-(1+1+0)$$

$$= -6$$

และ $AB = I = BA$ จะได้ว่า $B = A^{-1}$

ดังนั้น
$$\det\left(\frac{1}{2}\operatorname{adj} B\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\frac{1}{2}\operatorname{adj} B\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(\operatorname{adj} B)}$$

$$= \frac{8}{\det(\operatorname{adj} A^{-1})}$$

$$= \frac{8}{[\det(A^{-1})]^{3-1}}$$

$$= \frac{8}{\left(\frac{1}{\det A}\right)^2}$$

$$= \frac{8}{\left(\frac{1}{-6}\right)^2}$$

$$= 8\cdot 36$$

$$= 288$$

14. เฉลย 3) $3\sqrt{5}$ ตารางหน่วย

จากโจทย์ $\qquad \bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad$ ...(1)

$\qquad \bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad$ ...(2)

(1) + (2); $\qquad 2\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ หรือ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(1) − (2); $\qquad 2\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ หรือ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

หา $\bar{u} \times \bar{v}$

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\bar{u}$	0	0	−3	0	0
$\bar{v}$	2	1	−1	2	1

$$\bar{u} \times \bar{v} = (0\bar{i} - 6\bar{j} + 0\bar{k}) - (0\bar{k} - 3\bar{i} - 0\bar{j})$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = 3\bar{i} - 6\bar{j}$$

$\therefore$ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\bar{u} \times \bar{v}|$

$= |3\bar{i} - 6\bar{j}|$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ตารางหน่วย

15. เฉลย 5) 5

$$\left[3^{\log_{(3^{-1})}(2^{-1})}\right]^{x^2-2x-1} \leq \left[e^{\log_e\left[\frac{1}{2}\right]}\right]^{3x-1}$$

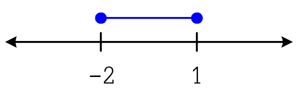
$$(3^{\log_3 2})^{x^2-2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$$

$$2^{x^2-2x-1} \leq 2^{-3x+1}$$

$$x^2 - 2x - 1 \leq -3x + 1$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0$$



เซตคำตอบ คือ $[a, b] = [-2, 1]$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$

16. เฉลย 2) (3, −1)

ให้ B คือ จุด (x, y)

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$

จาก $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ จะได้ $\overrightarrow{AB} \cdot \bar{u} = 0$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= 0 \\
(x-1) + 2y &= 0 \\
x - 1 &= -2y
\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{5} \\
\sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= \sqrt{5} \\
(-2y)^2 + y^2 &= 5 \\
5y^2 &= 5 \\
y &= -1, 1
\end{aligned}$$

ถ้า $y = -1$ จะได้ $x = 3$ ดังนั้น B คือ (3, −1) ตรงกับตัวเลือก 2)

ถ้า $y = 1$ จะได้ $x = -1$ ดังนั้น B คือ (−1, 1)

17. เฉลย 2) $2\sqrt{35}$

จาก

$$\begin{aligned}
\bar{u} + \bar{v} &= \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} \\
|\bar{u} + \bar{v}|^2 &= (\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2})^2 \\
|\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 &= 6 \qquad \text{...(1)}
\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned}
|\bar{u} - \bar{v}| &= \sqrt{34} \\
|\bar{u} - \bar{v}|^2 &= (\sqrt{34})^2 \\
|\bar{u}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 &= 34 \qquad \text{...(2)}
\end{aligned}$$

(1) + (2) ; $2(|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2) = 40$

$$|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 20$$

(1) − (2) ; $4\bar{u} \cdot \bar{v} = -28$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = -7 \qquad \text{...(3)}$$

จาก

$$\begin{aligned}
|3\bar{u} + 2\bar{v}| &= |\bar{u} - 2\bar{v}| \\
|3\bar{u} + 2\bar{v}|^2 &= |\bar{u} - 2\bar{v}|^2 \\
9|\bar{u}|^2 + 12\bar{u} \cdot \bar{v} + 4|\bar{v}|^2 &= |\bar{u}|^2 - 4\bar{u} \cdot \bar{v} + 4|\bar{v}|^2 \\
8|\bar{u}|^2 &= -16\bar{u} \cdot \bar{v} \qquad \text{...(4)}
\end{aligned}$$

แทน (3) ใน (4) ; $8|\bar{u}|^2 = -16(-7)$

$$|\bar{u}|^2 = 14 \quad \text{หรือ } |\bar{u}| = \sqrt{14} \qquad \text{...(5)}$$

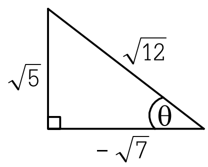
จะได้ $|\bar{v}|^2 = 6$ หรือ $|\bar{v}| = \sqrt{6}$ ...(6)

พิจารณา

$$\begin{aligned}
|\bar{u} \times (2\bar{v} + \bar{u})| &= |2(\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{u})| \\
&= 2|\bar{u} \times \bar{v}| \\
&= 2|\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta \qquad \text{...(7)}
\end{aligned}$$

หา $\sin\theta$ จาก

$$\begin{aligned}
\bar{u} \cdot \bar{v} &= |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta \\
-7 &= \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} \cos\theta \\
-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} &= \cos\theta
\end{aligned}$$



จะได้ $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$ ...(8)

แทน (5), (6), (8) ใน (7) ;

$$\therefore |\bar{u} \times (2\bar{v} + \bar{u})| = 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = 2\sqrt{35}$$

18. เฉลย 4) $\frac{21}{32}$

$$
\begin{aligned}
n(S) &= 2^6 = 64 \\
n(E) &= 2^6 - \underset{\text{ไม่มีคนมา}}{\underset{\uparrow}{\binom{6}{0}}} - \underset{\text{มา 1 คน}}{\underset{\uparrow}{\binom{6}{1}}} - \underset{\text{มา 2 คน}}{\underset{\uparrow}{\binom{6}{2}}} \\
&= 64 - 1 - 6 - 15 \\
&= 42 \\
\therefore\ P(E) &= \frac{42}{64} \\
&= \frac{21}{32}
\end{aligned}
$$

19. เฉลย 3) 3

จาก

$$
\begin{aligned}
\text{S.D.} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1,250}{50} - \left(\frac{200}{50}\right)^2} \\
&= \sqrt{25 - 16} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

20. เฉลย 4) $\frac{31}{21}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8^n} + \frac{2^n}{8^n} + \frac{4^n}{8^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{3 + 7 + 21}{21} \\
&= \frac{31}{21}
\end{aligned}
$$

21 เฉลย 5) 5

จากโจทย์ $f'(x) = 3x^2 - 4x^{-2} - 2$

จะได้ $f(x) = x^3 - \frac{4x^{-1}}{-1} - 2x + c$

$f(x) = x^3 + \frac{4}{x} - 2x + c$

เส้นโค้งผ่านจุด (2, 8) ; $f(2) = 2^3 + \frac{4}{2} - 2 \times 2 + c$

$8 = 8 + 2 - 4 + c$

$2 = c$

จะได้ $f(x) = x^3 + \frac{4}{x} - 2x + 2$

เส้นโค้งผ่านจุด (1, a) ; $a = f(1) = 1 + 4 - 2 + 2$

$= 5$

22. เฉลย 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

จากโจทย์
$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{4x^4 - x^6}} dx \\
&= \int \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}} dx \\
&= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{u^{1/2}} du \\
&= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2} du \\
&= -\frac{1}{4} u^{1/2} + c \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)^{1/2} + c
\end{aligned}
$$

ให้ $u = \frac{4}{x^2} - 1$

$u = 4x^{-2} - 1$

$\frac{du}{dx} = -\frac{8}{x^3}$

$-\frac{1}{8} du = \frac{1}{x^3} dx$

จาก F(x) ผ่านจุด A(1, a) แทน x = 1 ใน F(x)

$F(1) = -\frac{1}{4}\sqrt{3} + c$

$a = -\frac{\sqrt{3}}{4} + c$ ...(1)

จาก F(x) ผ่านจุด B(2, b) แทน x = 2 ใน F(x)

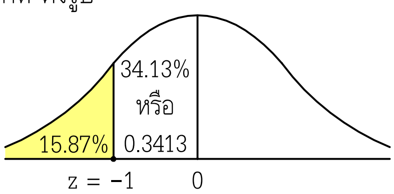
$F(2) = -\frac{1}{4}(0) + c$

$b = c$ ...(2)

(2) − (1) $b - a = \frac{\sqrt{3}}{4}$

23. เฉลย 1) 5 คน

จากโจทย์ จะได้โค้งปกติ ดังรูป



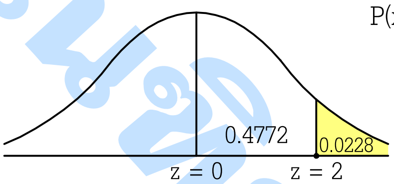
จาก $z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$ และ $\frac{S}{\bar{x}} = 20\%$

$-1 = \frac{48 - \bar{x}}{S}$ $\frac{S}{\bar{x}} = \frac{20}{100}$

$-S = 48 - 5S$ $5S = \bar{x}$

$4S = 48$

$S = 12$ จะได้ $\bar{x} = 60$



$$P(x > 84) = P\left(z > \frac{84-60}{12}\right)$$
$$= P(z > 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772$$
$$= 0.0228$$

∴ จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนน**มากกว่า** 84 คะแนนมี $0.0228 \times 200 \approx 5$ คน

24. เฉลย 4) 10,400 เครื่อง

พ.ศ.	**x**	**ยอดขาย (y)**	**xy**	**x^2**
2560	−5	1	−5	25
2561	−3	3	−9	9
2562	−1	4	−4	1
2563	1	6	6	1
2564	3	7	21	9
2565	5	9	45	25
	$\sum x = 0$	$\sum y = 30$	$\sum xy = 54$	$\sum x^2 = 70$

จากความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง $y = mx + c$

จะได้ $\sum y = m\sum x + cn$

$30 = m(0) + c(6)$

$c = 5$

และ $\sum xy = m\sum x^2 + c\sum x$

$54 = 70m + 5(0)$

$m = \frac{27}{35}$

จะได้สมการ คือ $y = \frac{27}{35}x + 5$ ...(*)

หายอดจำหน่ายทีวีของปี พ.ศ. 2566 โดยการแทน $x = 7$ ในสมการ (*)

จะได้ $y = \frac{27}{35}(7) + 5$

$= 5.4 + 5$

$= 10.4$

ดังนั้น ยอดจำหน่ายทีวีโดยประมาณของปี พ.ศ. 2566 คือ $10.4 \times 1000 = 10,400$ เครื่อง

25. เฉลย 1) $\frac{221}{150}$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{9}{3^{n+1}}-\sum_{n=1}^{k}\frac{2^n}{5^{n+2}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(3\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n}-\frac{1}{25}\sum_{n=1}^{k}\frac{2^n}{5^n}\right)$$

$$= 3\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n}\right)-\frac{1}{25}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)-\frac{1}{25}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots\right)$$

$$= 3\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)-\frac{1}{25}\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}-\frac{2}{75}$$

$$= \frac{221}{150}$$

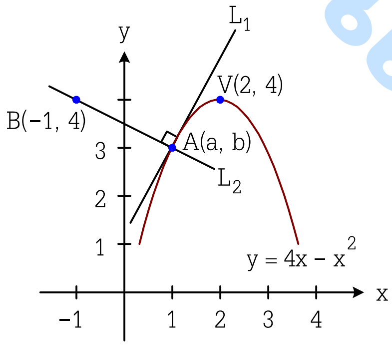
ส่วนที่ 2 : ข้อ 26-30 ข้อละ 5 คะแนน

26. เฉลย 4

เนื่องจากจุด (a, b) อยู่บนพาราโบลา $y = 4x - x^2$

จะได้ $b = 4a - a^2$ ...(1)

จุด (a, b) บนพาราโบลา $y = 4x - x^2$ อยู่ใกล้จุด (−1, 4) **มากที่สุด** แสดงว่าเส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด (a, b) จะตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด (a, b) และ (−1, 4) ที่จุด (a, b) ดังรูป



จาก $f(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x$

$f'(a) = 4 - 2a$

จะได้ $m_{L_1} = f'(a)$

$m_{L_1} = 4 - 2a$

จากรูป $m_{L_1}\cdot m_{L_2} = -1$

$$(4-2a)\left(\frac{b-4}{a+1}\right) = -1 \qquad \ldots(2)$$

แทน (1) ใน (2) ; $(4-2a)\left(\frac{4a-a^2-4}{a+1}\right) = -1$

$$(4-2a)(4a-a^2-4) = -a-1$$

$$16a-4a^2-16-8a^2+2a^3+8a = -a-1$$

$$2a^3-12a^2+25a-15 = 0$$

$$(a-1)(2a^2-10a+15) = 0$$

เนื่องจาก $2a^2-10a+15 = 2\left(a^2-5a+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-2\left(\frac{5}{2}\right)^2+15$

$= 2\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$ มีค่า**มากกว่า** 0 เสมอ

จะได้ $a-1 = 0$

$a = 1$

แทน a = 1 ใน (1) จะได้ $b = 4(1)-1$

$b = 3$

ดังนั้น $b + a = 3 + 1$

$= 4$

27. เฉลย 5

จาก
$$\log_a(m-n)+\log_a(m+n) = 5$$
$$\log_a(m^2-n^2) = 5$$
$$\frac{\log(m^2-n^2)}{\log a} = 5$$
$$\log(m^2-n^2) = 5\log a$$

ดังนั้น
$$\frac{\log_{(m+n)}a+\log_{(m-n)}a}{(\log_{(m+n)}a)(\log_{(m-n)}a)}$$
$$= \frac{\log a\left(\frac{1}{\log(m+n)}+\frac{1}{\log(m-n)}\right)}{(\log a)^2\left(\frac{1}{\log(m+n)}\cdot\frac{1}{\log(m-n)}\right)}$$
$$= \frac{1}{\log a}\left(\frac{\log(m-n)+\log(m+n)}{\log(m+n)\log(m-n)}\right)(\log(m+n)\cdot\log(m-n))$$
$$= \frac{1}{\log a}[\log(m^2-n^2)]$$
$$= \frac{1}{\log a}(5\log a) = 5$$

28. เฉลย 0.20

แบ่งคนกลุ่มหนึ่งจำนวน 6 คน คือ A, B, C, D, E และ F ออกเป็น 2 กลุ่ม เท่าๆ กัน กลุ่มละ 3 คน

จำนวนวิธีในการแบ่ง คือ $n(S) = \frac{6!}{3!3!2!}$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่นาย A กับนาย B อยู่กลุ่มเดียวกัน และนาย C กับนาย D อยู่กลุ่มเดียวกัน

เกิดได้ 2 วิธี คือ วิธีที่ 1 A, B และ E และ C, D และ F

วิธีที่ 2 A, B และ F และ C, D และ E

$$n(E) = 2$$
$$\therefore P(E) = \frac{2}{\left(\frac{6!}{3!3!2!}\right)}$$
$$= \frac{2}{10} = 0.20$$

29. เฉลย 2

จาก $f\left(\frac{x}{2}-1\right) = \frac{x}{2}+1$ และ $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

$\frac{x}{2}-1 = f^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ $x = g\left(\frac{x}{x-2}\right)$

จาก
$$(g^{-1}of)^{-1}(2) = (f^{-1}og)(2)$$
$$= f^{-1}(g(2)) \qquad ...(1)$$

พิจารณา $g\left(\frac{x}{x-2}\right) = x$

แทน x = 4 ; $g(2) = 4$

จะได้ $f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(4)$ ...(2)

พิจารณา $f^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{x}{2}-1$

แทน x = 6 ; $f^{-1}(4) = \frac{6}{2}-1 = 2$ ...(3)

จาก (1), (2), (3) ; $\therefore (g^{-1}of)^{-1}(2) = 2$

30. เฉลย 3

จาก $f(x) = 3x^{2/3}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{(2/3)-1}$$

$$f'(x) = 2x^{-1/3}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(1) &= f'(g(1)) \cdot g'(1) \\ &= f'(8) \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 8^{-1/3} \cdot 3 \\ &= 6 \cdot (2^3)^{-1/3} \\ &= 6 \cdot 2^{-1} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\end{aligned}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧