



เรขาคณิต

ดีดไม่ห่าง

ใหม่ล่าสุด ! เพื่อใช้ทบทวนความรู้ และ เตรียมตัวสอบอย่างได้พล

- สรุปเนื้อหา เรขาคณิต พร้อมนิยาม กฎ สูตร อย่างครบถ้วน ทั้งในระดับประถมศึกษา และมีธยมศึกษาตอนต้น
- รวมโจทย์เด่นจากค่ายคณิตศาสตร์กว่า 20 ประเทศ และโจทย์แข่งขันระดับนานาชาติ (โอลิมปิกวิชาการ ฯลฯ)
- เฉลยอย่างละเอียดครบทุกข้อ พร้อมเทคนิคการแก้ไขโจทย์ปัญหาที่กระชับ ตรงประเด็น แต่อ่านเข้าใจได้ง่าย
- เหมาะสำหรับครูใช้เป็นคู่มือสร้างแบบทดสอบขั้นสูง และนักเรียนใช้อ่านเตรียมตัวสอบแข่งขันระดับประเทศ



คำนำ

ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี เป็นปัจจัยประการสำคัญในการขับเคลื่อนประเทศให้ก้าวพ้นจากความล้าหลัง อ่อนแอ ไปสู่สังคมใหม่ที่มีความทันสมัย แข็งแรง เปรียบพร้อมด้วย แส่นยานภาพและพลังอำนาจ ทั้งในด้านการศึกษา การเมือง การทหาร เศรษฐกิจ การค้า และการลงทุน

สำหรับประเทศไทย แม้ในช่วงสองทศวรรษที่ผ่านมาจะได้อาศัยความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี เป็นพื้นฐานในการเปลี่ยนผ่านจากประเทศกำลังพัฒนา ไปสู่ประเทศอุตสาหกรรมใหม่ ที่สามารถพึ่งพาตนเองได้ในหลายๆ ด้าน แต่ก็ยังมีอาจติดเทียมกับนานาอารยประเทศ จำเป็นอย่างยิ่งที่ ทุกหน่วยงาน/องค์กร จะผนึกกำลังกันในการสร้างจิตสำนึก และผลักดันให้คนในชาติ โดยเฉพาะเยาวชน ได้ตระหนัก ตื่นตัว หันมาสนใจใฝ่เรียนรู้วิทยาการ และประดิษฐ์คิดค้นนวัตกรรมใหม่ๆ อย่างต่อเนื่อง

การจัดพิมพ์หนังสือ “เรขาคณิตคิดไม่ยาก” เล่มนี้ เป็นส่วนหนึ่งของปณิธานร่วมในการกระตุ้น และส่งเสริมเยาวชนในวัยเรียนรวมทั้งผู้ที่สนใจใฝ่รู้ ให้ได้มีโอกาสฝึกคิดเพื่อแก้ไขโจทย์ปัญหาใหม่ๆ ทางเรขาคณิตที่ยังไม่แพร่หลาย ซึ่งผู้เขียนได้เพียรพยายามรวบรวมจากค่ายคณิตศาสตร์ประเทศต่างๆ รวมทั้งโจทย์ที่ใช้ในการแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ (โอลิมปิกวิชาการ) โดยใช้พื้นฐานความรู้ไม่เกิน มัธยมศึกษาตอนต้น ในส่วนท้ายเล่มผู้เขียนได้นำเสนอแนวคิด เทคนิคการแก้ไขปัญหาย่อยๆ กระชับ และตรงประเด็น เพื่อให้ผู้อ่านใช้เป็นแนวทางในการศึกษาด้วยตนเองอย่างได้ผล

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะมีส่วนช่วยกระตุ้นต่อมคิด สร้างความอยากรู้-อยากเห็น ความท้าทายใหม่ๆ ทางวิชาการ และสานฝันเยาวชนไทยให้มีจินตนาการที่ก้าวไกล เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยีอย่างไม่มีสิ้นสุด

สำนักงานบัณฑิตแนะแนว

เรขาคณิตคิดไม่ยาก

กองบรรณาธิการ : ไพจิตร ศุภพิมล สุตาภัทร ชัยชนะ ปรีนทร เสนไสย์ กัญญาณัฐ พูลผล

คอมพิวเตอร์ : เพียว ชาวบ้านช่อง สุจิตตา ไชยจันลา สารีกา โกยรัมย์ อระสา อุนทรพันธุ์

ศิลปกรรม : บุญเลิศ จันทร์นาค อธิรุทธ พงษ์ศิริรัตน์ ปรีดาวรรณ ชลชีพ
สันติ วิเศษสุทธิ ณรงค์ศักดิ์ รอดนาค

เจ้าของ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว

เลขที่ 1033/4 ถนนพหลโยธิน แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กทม. 10400

โทรศัพท์ 02-2794808 และ 02-6195844 แฟกซ์ 02-6171820

พิมพ์ที่ : ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์

เลขที่ 195/6 หมู่ 5 ซอยพุทธบูชา 44 แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กทม. 10140 โทรศัพท์ 02-8706301-3

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ พ.ศ. 2537 : ห้ามลอกเลียน คัดลอก จัดพิมพ์ หรือทำซ้ำ

ไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

คำปรารภของผู้เขียน

หนังสือ **เรขาคณิตคิดไม่ยาก** เล่มนี้ได้รวบรวมโจทย์ปัญหาเรขาคณิตจากค่ายคณิตศาสตร์โอลิมปิก โจทย์แข่งขันจากประเทศต่างๆ เช่น สหรัฐอเมริกา ออสเตรเลีย จีน ญี่ปุ่น สวีเดน เกาหลี เวียดนาม อังกฤษ ฮังการี และอื่นๆ อีกมากมาย ผู้เขียนเริ่มรวบรวมโจทย์ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2548 จนถึงปี พ.ศ. 2550 และเน้นการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ความรู้ในระดับมัธยมต้น อาศัยนิยาม สูตร ทฤษฎี และการสร้าง (Construction) ซึ่งภาษาเรขาคณิตเรียกว่า การตัดรูปในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อจะได้พัฒนาเยาวชน และผู้สนใจในเรขาคณิตได้ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติม

อนึ่งหนังสือเล่มนี้เป็นเล่มแรก จะคู่กับอีกเล่มหนึ่ง คือ **พีชคณิตคิดเพื่อชาติ** ซึ่งจะใช้ความรู้ในระดับมัธยมศึกษาต้น แก้โจทย์ปัญหาระดับนานาชาติเช่นกัน

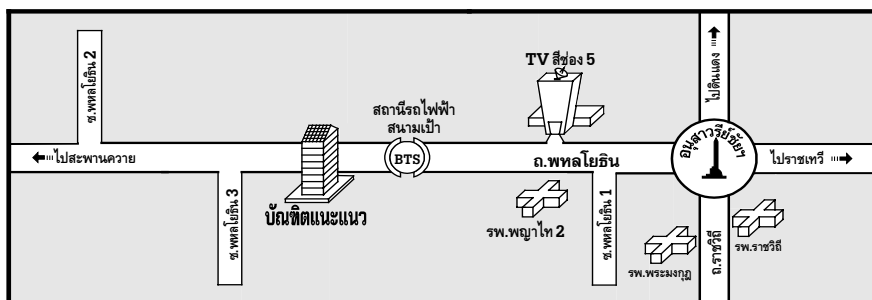
ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ บันนิม ผู้จุดประกายความคิด ครูสุรศักดิ์ สุวรรณโณดม ผู้สนับสนุนหนังสือเรขาคณิตของรัสเซีย คณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาที่คอยให้กำลังใจ ความดีของหนังสือเล่มนี้ขอบแต่ครู-อาจารย์ ส่วนขอบกพร่อง ผู้เขียนขอน้อมรับไว้ เพื่อการปรับปรุงในโอกาสต่อไป สุดท้ายผู้เขียนหวังว่าหนังสือ **เรขาคณิตคิดไม่ยาก** เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านไม่มากก็น้อย

ไมตรี ศรีทองแท้



สารบัญ

☆	สรุปเนื้อหา.....	4
☆	พื้นที่ (AREA) ของรูปเรขาคณิต.....	28
☆	ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและวงกลม.....	46
☆	ความเท่ากันทุกประการ.....	66
☆	ความคล้าย.....	90
☆	เฉลย.....	108
	พื้นที่ของรูปเรขาคณิต.....108-120	ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและวงกลม.....121-139
	ความเท่ากันทุกประการ.....140-155	ความคล้าย.....156-173
☆	บรรณานุกรม.....	174
☆	ประวัติผู้เขียน.....	175



สำนักงานบัณฑิตแนะแนว 1033/4 ถ.พหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400

โทรศัพท์ 02-2794808 และ 02-6195844 แฟกซ์ 02-6171820

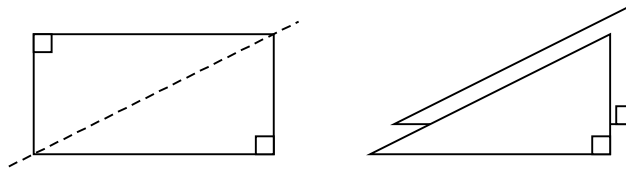
Website : <http://www.bunditnaeaeaw.com> และ www.bunditonline.com

เปิดทำการทุกวัน เวลา 08.00-17.00 น. (หยุดวันนักขัตฤกษ์)

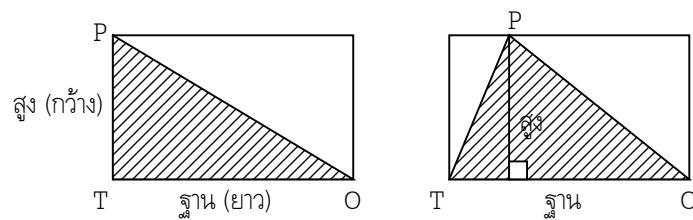
สรุปเนื้อหา

1. สูตรที่ใช้คำนวณหาพื้นที่รูปเรขาคณิต

1.1 พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

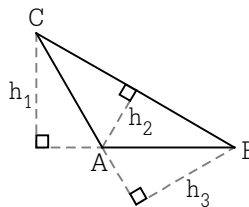


เมื่อตัดตามแนวเส้นทแยงมุมของแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้สามเหลี่ยม 2 รูป มีพื้นที่เท่ากัน นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม



เนื่องจาก พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง $\times$ ความยาว
 แต่จากข้อมูลข้างต้นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
 ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{กว้าง} \times \text{ยาว}$
 $= \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ฐาน}$

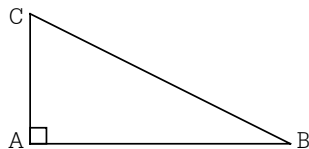
1. รูปสามเหลี่ยมใดๆ



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1 \\ &\text{หรือ } \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_2 \\ &\text{หรือ } \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_3 \end{aligned}$$

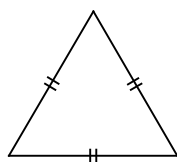


2. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



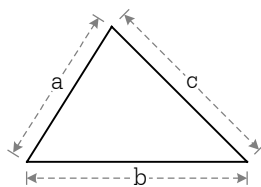
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ } \triangle \text{ มุมฉาก} &= \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของด้านประกอบมุมฉาก} \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times AC\end{aligned}$$

3. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



$$\text{พื้นที่ } \triangle \text{ ด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\text{ด้าน})^2$$

4. รูปสามเหลี่ยมใดๆ (เมื่อกำหนดความยาวด้านทั้งสาม)

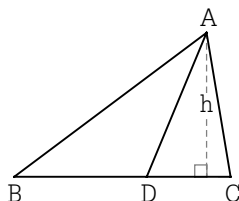


$$\text{พื้นที่ } \triangle \text{ ใดๆ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นความยาวของแต่ละด้าน

$$\text{และ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

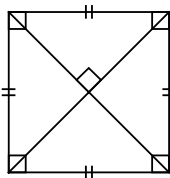
5. อัตราส่วนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกัน เท่ากับอัตราส่วนของความยาวฐาน



$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABD}{\text{พื้นที่ } \triangle ACD} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times BD}{\frac{1}{2} \times h \times CD} = \frac{BD}{CD}$$

1.2 พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม

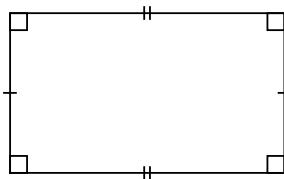
1. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ } \square \text{ จัตุรัส} &= \text{ด้าน} \times \text{ด้าน} \\ &= (\text{ด้าน})^2\end{aligned}$$

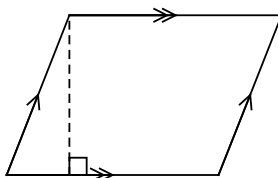
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ } \square \text{ จัตุรัส} &= \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม} \\ &= \frac{1}{2} (\text{เส้นทแยงมุม})^2\end{aligned}$$

2. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



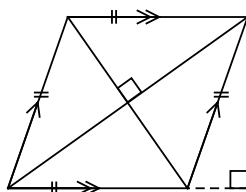
$$\text{พื้นที่ } \square \text{ ผืนผ้า} = \text{กว้าง} \times \text{ยาว}$$

3. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



$$\text{พื้นที่ } \square \text{ ด้านขนาน} = \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

4. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

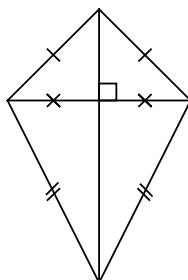


$$\text{พื้นที่ } \square \text{ ขนมเปียกปูน} = \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$\text{พื้นที่ } \square \text{ ขนมเปียกปูน} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม}$$

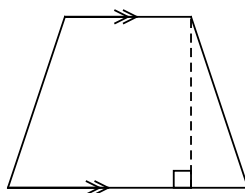


5. รูปสี่เหลี่ยมรูปร่าง



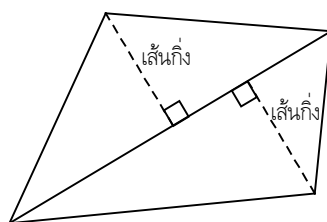
$$\text{พื้นที่ } \square \text{ รูปร่าง} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม}$$

6. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



$$\text{พื้นที่ } \square \text{ คางหมู} = \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ผลบวกด้านคู่ขนาน}$$

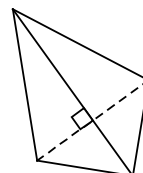
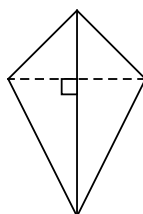
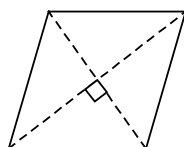
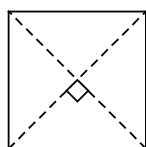
7. รูปสี่เหลี่ยมใดๆ



$$\text{พื้นที่ } \square \text{ ใดๆ} = \frac{1}{2} \times \text{เส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกของเส้นกึ่ง}$$

ข้อสังเกต

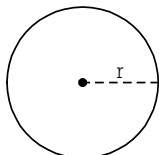
รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน สี่เหลี่ยมรูปร่าง และรูปสี่เหลี่ยมอื่นๆ ที่เส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน ดังรูป



$$\text{พื้นที่รูป } \square = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม}$$

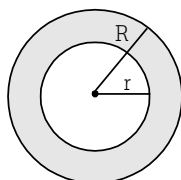
1.3 พื้นที่รูปวงกลม

1. วงกลม



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่วงกลม} &= \pi r^2 \quad \text{เมื่อ } r = \text{รัศมีของวงกลม} \\ * \text{ความยาวเส้นรอบวง} &= 2\pi r\end{aligned}$$

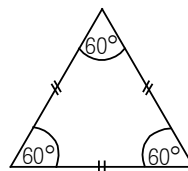
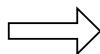
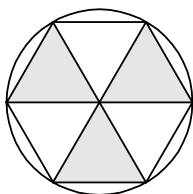
2. วงแหวน



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่วงแหวน} &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r)\end{aligned}$$

หมายเหตุ π เป็นจำนวนอตรรกยะ ไม่สามารถหาค่าที่แท้จริงได้ ในการคำนวณ ถ้าจะแทนค่าของ π นิยมใช้ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ซึ่งเป็นค่าประมาณ

1.4 พื้นที่รูปหกเหลี่ยม



จากรูป ถ้าเขียนรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า บรรจุในวงกลม แล้วลากเส้นทแยงมุมจะได้รูป Δ ด้านเท่าทั้งหมด 6 รูป (ทุกรูปมีขนาดเท่ากัน)

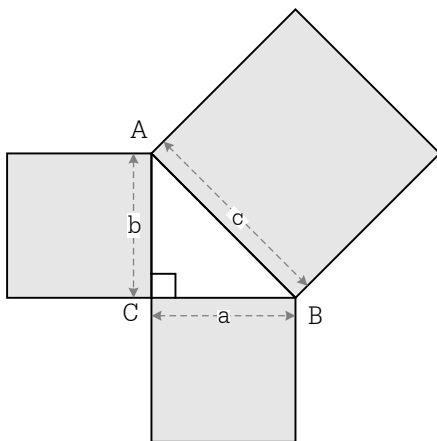
$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น พื้นที่ของหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า} &= 6 (\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ด้านเท่า}) \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{ด้าน})^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (\text{ด้าน})^2\end{aligned}$$



2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

2.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

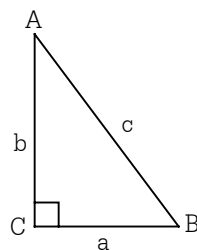
ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก
c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก
จากทฤษฎีบทจะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

2.2 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านอีกสองด้านแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

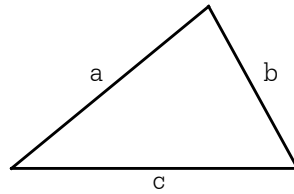


จากรูป ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$
แล้ว ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก
c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

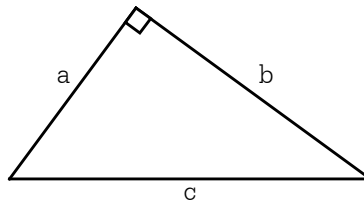
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้าน

รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a , b และ c หน่วย โดย $c > b$ และ $c > a$

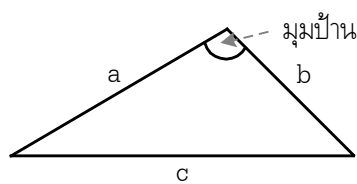
1. ถ้า $c^2 < a^2 + b^2$ รูป $\triangle$ มีมุมแหลมทุกมุม



2. ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ รูป $\triangle$ มีมุมฉาก



3. ถ้า $c^2 > a^2 + b^2$ รูป $\triangle$ มีมุมป้าน





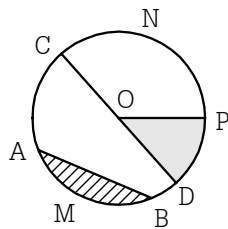
3. วงกลม

3.1 วงกลม (Circle)

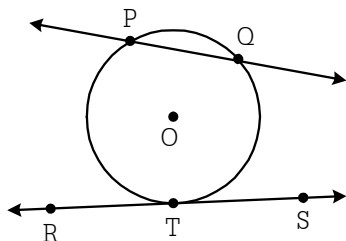
3.1.1 วงกลม คือ รูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งมีแนวทางเคลื่อนที่ของจุดห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะห่างเท่าๆ กัน โดยที่

- (1) จุดคงที่ เรียกว่า **จุดศูนย์กลางของวงกลม** (center หรือ origin)
- (2) ระยะห่างเท่าๆ กัน เรียกว่า **รัศมีวงกลม** (radius, radii)
- (3) แนวทางเคลื่อนที่ของจุด เรียกว่า **เส้นรอบวงของวงกลม** (ถ้าวงกลมมีรัศมียาว r หน่วย เส้นรอบวงของวงกลมจะยาว $2\pi r$ หน่วย)

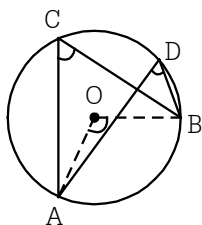
3.1.2 ข้อควรทราบเกี่ยวกับวงกลม



จุด	O	เรียกว่า	จุดศูนย์กลางของวงกลม
	OP	เรียกว่า	รัศมีของวงกลม
	AB	เรียกว่า	คอร์ดของวงกลม
	CD	เรียกว่า	เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
	$\widehat{ANB}$	เรียกว่า	ส่วนโค้งใหญ่ของวงกลม
	$\widehat{AMB}$	เรียกว่า	ส่วนโค้งน้อยของวงกลม
บริเวณ	OPD	เรียกว่า	สามเหลี่ยมฐานโค้ง (sector)
บริเวณ	AMB	เรียกว่า	เซกเมนต์ (segment)



$\overleftrightarrow{PQ}$	เรียกว่า	เส้นตัดวงกลม โดยจะตัดวงกลม O ที่จุด P และ Q เพียง 2 จุด
$\overleftrightarrow{RS}$	เรียกว่า	เส้นสัมผัสวงกลม เพราะตัดวงกลม O ที่จุด T เพียงจุดเดียว และเรียกจุด T ว่าจุดสัมผัส

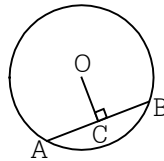


$\angle AOB$	เรียกว่า	มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
$\angle ACB$ และ $\angle ADB$	เรียกว่า	มุมในส่วนโค้งของวงกลม

3.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม

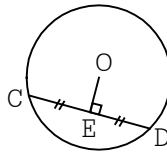
3.2.1 คอร์ดของวงกลม

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลาง
มาตั้งฉากกับคอร์ดย่อมแบ่งครึ่งคอร์ด



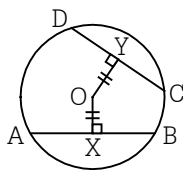
ถ้า $\overline{OC} \perp \overline{AB}$
ดังนั้น $AC = CB$

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลาง
มาแบ่งครึ่งคอร์ดย่อมตั้งฉากกับคอร์ด



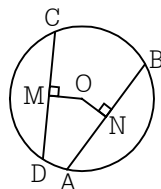
ถ้า $CE = ED$
ดังนั้น $\overline{OE} \perp \overline{CD}$

คอร์ดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน
ย่อมยาวเท่ากัน



ถ้า $OX = OY$
ดังนั้น $AB = CD$

ถ้าคอร์ดยาวเท่ากันย่อมอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน

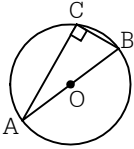


ถ้า $AB = CD$
ดังนั้น $ON = OM$



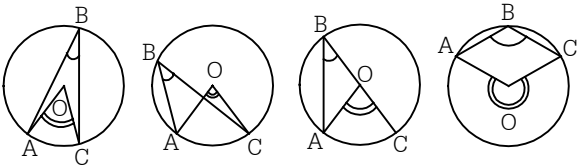
3.2.2 มุมในส่วนโค้งของวงกลมและมุมที่จุดศูนย์กลาง

มุมในครึ่งวงกลมเท่ากับ 90 องศา



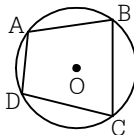
ถ้า $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้น $\angle ACB = 90^\circ$

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



$\angle AOC = 2\angle ABC$, $\angle AOC = 2\angle ABC$, $\angle AOC = 2\angle ABC$, มุมกลับ $\angle AOC = 2\angle ABC$

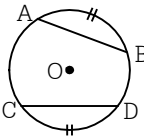
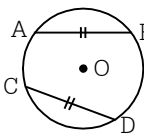
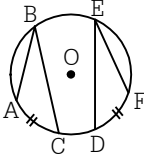
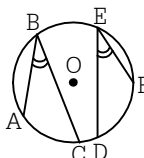
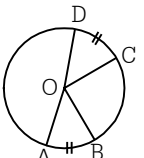
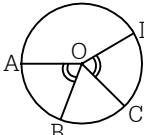
ผลบวกของมุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา



$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$
 $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



3.2.3 ส่วนโค้งและคอร์ด, ส่วนโค้งและมุมในส่วนโค้ง, ส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลาง

คอร์ดที่ตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากันย่อมยาวเท่ากัน  ถ้า $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ ดังนั้น $AB = CD$	คอร์ดที่ยาวเท่ากันย่อมตัดส่วนโค้งออกได้เท่ากัน  ถ้า $AB = CD$ ดังนั้น $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน  ถ้า $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{DF})$ ดังนั้น $\angle ABC = \angle DEF$	ถ้ามุมในส่วนโค้งมีขนาดเท่ากัน ส่วนโค้งที่รองรับมุมย่อมยาวเท่ากัน  ถ้า $\angle ABC = \angle DEF$ ดังนั้น $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{DF})$
ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน  ถ้า $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ ดังนั้น $\angle AOB = \angle COD$	ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน ส่วนโค้งที่รองรับมุมย่อมยาวเท่ากัน  ถ้า $\angle AOB = \angle COD$ ดังนั้น $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$



3.2.4 เส้นสัมผัสวงกลม

	รัศมีย่อมตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส เมื่อ $\overleftrightarrow{XY}$ และ $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่ Z และ R ดังนั้น $\overline{OZ} \perp \overleftrightarrow{XY}$, $\overline{OR} \perp \overleftrightarrow{PQ}$
	เส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกจุดหนึ่งไปสัมผัสวงกลมเดียวกัน จะยาวเท่ากัน และมีเพียง 2 เส้น เมื่อ $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่ X และ Y ดังนั้น $PX = PY$ *เมื่อลาก $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ จะได้ $\angle XOY + \angle XPY = 180^\circ$
	มุมที่เกิดจากคอร์ตรจตเส้นสัมผัสสัมผัสเท่ากับมุมในส่วนโค้งที่อยู่ตรงกันข้าม เมื่อ $\overleftrightarrow{MN}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด P โดยมี $\overline{OP}$ และ $\overline{PR}$ เป็นคอร์ตร ดังนั้น $\angle MPQ = \angle PRQ$ และ $\angle RPN = \angle PQR$

3.2.5 วงกลมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ก. หลักการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบรรจุภายในวงกลม

1. แบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางออกเป็น n ส่วนเท่ากัน โดยแต่ละมุมมีค่า $= \frac{360^\circ}{n}$

2. ลากคอร์ตรจตรับมุมที่ได้จากข้อ 1 จะได้รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามต้องการ

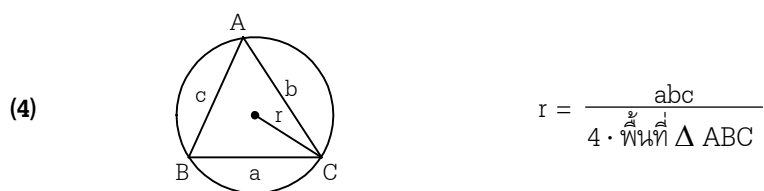
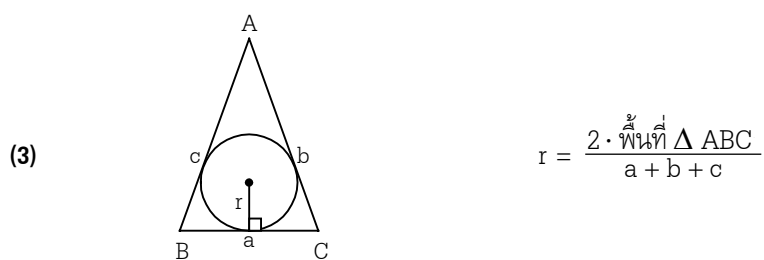
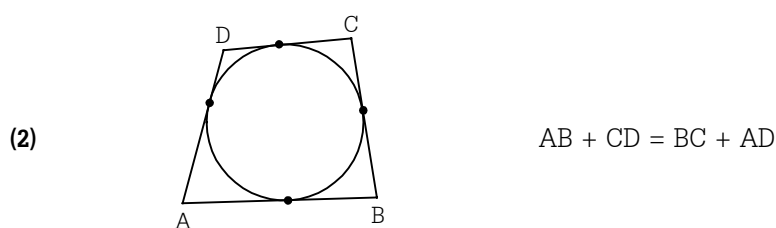
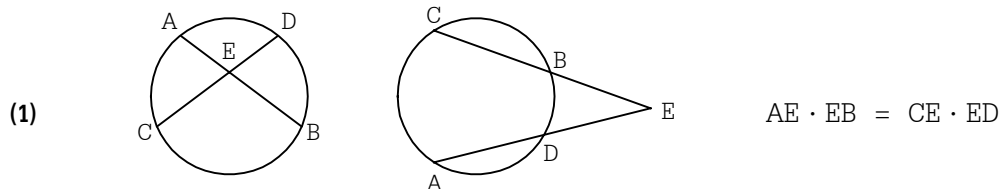
ข. ผลบวกของมุมภายในทุกมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $= 180^\circ(n - 2)$

ค. มุมภายในแต่ละมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $= \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$

ง. ผลบวกของมุมภายนอกทุกมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $= 360^\circ$

จ. เส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $= \frac{n}{2}(n - 1) - n = \frac{n}{2}(n - 3)$ เส้น

3.3 บทแทรกที่เกี่ยวข้องกับวงกลม



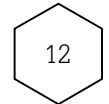
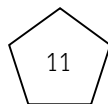
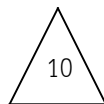
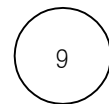
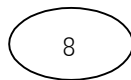
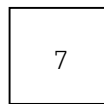
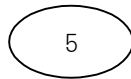
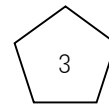
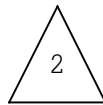
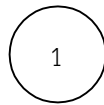


4. ความเท่ากันทุกประการ

4.1 ความเท่ากันทุกประการ

บทนิยาม รูปเรขาคณิต 2 รูป จะเท่ากันทุกประการได้ก็ต่อเมื่อ ยกรูปหนึ่ง ซ้อนอีกรูปหนึ่งแล้ว รูปทั้งสองนั้นทับกันสนิทพอดี ลักษณะที่เท่ากันทุกประการนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\cong$

พิจารณารูปต่อไปนี้



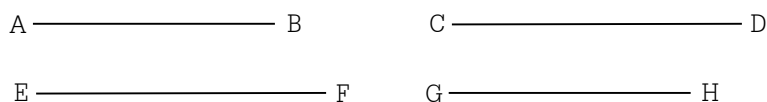
จากรูปข้างต้นจะมีรูปที่เท่ากันทุกประการดังนี้

- รูปที่ 1 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 9
- รูปที่ 2 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 10
- รูปที่ 3 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 11
- รูปที่ 4 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 7
- รูปที่ 5 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 8
- รูปที่ 6 เท่ากันทุกประการกับรูปที่ 12



4.2 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน



จากเส้นตรงข้างบนจะได้ว่า

ถ้า $AB = GH$ แล้ว $\overline{AB} \cong \overline{GH}$
 และ ถ้า $CD = EF$ แล้ว $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

ถ้าส่วนของเส้นตรง 2 เส้นยาวเท่ากัน แล้ว
 ส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้นนั้นเท่ากันทุกประการ

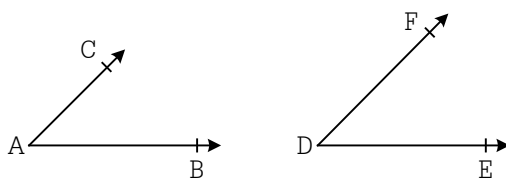
ในทางกลับกัน

ถ้า $\overline{AB} \cong \overline{GH}$ แล้ว $AB = GH$
 และ ถ้า $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ แล้ว $CD = EF$

ถ้าส่วนของเส้นตรง 2 เส้นเท่ากันทุกประการ
 แล้วส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้นนั้นยาวเท่ากัน

4.3 ความเท่ากันทุกประการของมุม

บทนิยาม มุมสองมุมจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน



จากรูปข้างต้นจะได้ว่า

ถ้า $m(\hat{BAC}) = m(\hat{EDF})$ แล้ว $\hat{BAC} \cong \hat{EDF}$
 หรือ $\hat{A} \cong \hat{D}$

ถ้ามุม 2 มุมมีขนาดเท่ากัน แล้ว
 มุมทั้ง 2 มุมนั้นเท่ากันทุกประการ

ในทางกลับกัน

ถ้า $\hat{BAC} \cong \hat{EDF}$ แล้ว $m(\hat{BAC}) = m(\hat{EDF})$
 หรือ $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$

ถ้ามุม 2 มุมเท่ากันทุกประการ
 แล้วมุมทั้ง 2 มุมนั้นมีขนาดเท่ากัน



4.4 สมบัติของความเท่ากันทุกประการ

จากสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่ว่า

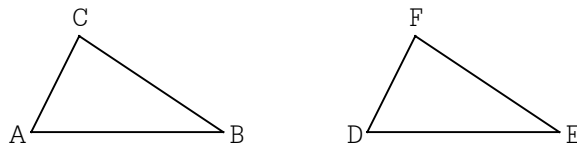
ถ้ารูปเรขาคณิต 2 รูปเท่ากันทุกประการ แล้วรูปเรขาคณิตทั้ง 2 รูปนั้นมีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเท่ากัน
ถ้ารูปเรขาคณิต 2 รูปมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปเรขาคณิตทั้ง 2 รูป นั้นเท่ากันทุกประการ

เราจะแยกพิจารณาสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต A, B และ C ใดๆ ได้ดังนี้

1. สมบัติสะท้อน : รูป $A \cong$ รูป A , รูป $B \cong$ รูป B , รูป $C \cong$ รูป C
2. สมบัติสมมาตร : ถ้ารูป $A \cong$ รูป B แล้วรูป $B \cong$ รูป A
3. สมบัติถ่ายทอด : ถ้ารูป $A \cong$ รูป B และ รูป $B \cong$ รูป C แล้วรูป $A \cong$ รูป C

4.5 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

4.5.1 นิยาม สามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อยกสามเหลี่ยมสองรูปวางซ้อนกันแล้วทับกันสนิทพอดี



จากรูป $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ จะเท่ากันได้ทุกประการก็ต่อเมื่อ ยกรูปสามเหลี่ยม 2 รูป วางซ้อนกันแล้วทับกันสนิทพอดี คือ จุด D ทับจุด A, จุด E ทับจุด B และจุด F ทับจุด C นั่นคือ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ และผลจากความเท่ากันจะได้ว่า

1. $\overline{AB} = \overline{DE}$
 $\overline{BC} = \overline{EF}$
 และ $\overline{AC} = \overline{DF}$
2. $\hat{A} = \hat{D}$
 $\hat{B} = \hat{E}$
 และ $\hat{C} = \hat{F}$

ถ้ารูป $\triangle$ 2 รูปเท่ากันทุกประการ แล้วด้านคู่ที่สมนัยกัน
และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ

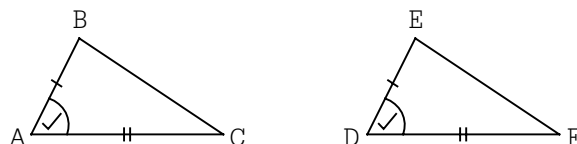
ถ้ารูป $\triangle$ 2 รูปมีด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน
มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ แล้วรูป $\triangle$ ทั้ง 2 รูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ลักษณะที่มีด้านที่ยาวเท่ากัน มุมที่มีขนาดเท่ากัน หรือจุดที่ทับกัน เรียกว่า “สมนัยกัน” เช่น AB สมนัยกับ DE หรือ $\hat{B}$ สมนัยกับ $\hat{E}$ หรือจุด C สมนัยกับจุด F

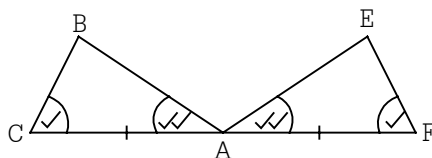


4.5.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบทที่ 1 ด.ม.ด. คือ สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



ทฤษฎีบทที่ 2 ม.ม.ม. คือ สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุม และมีด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่เท่ากันยาวเท่ากัน สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



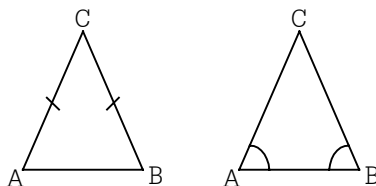
ทฤษฎีบทที่ 3 ม.ม.ด. คือ สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุม และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



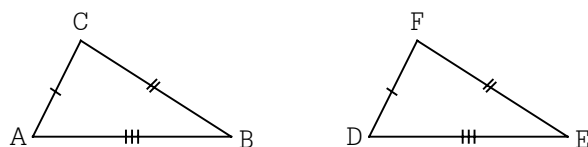
ทฤษฎีบทที่ 4 เป็นทฤษฎีเสริม แยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากัน (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

กรณีที่ 2 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะยาวเท่ากัน (รูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

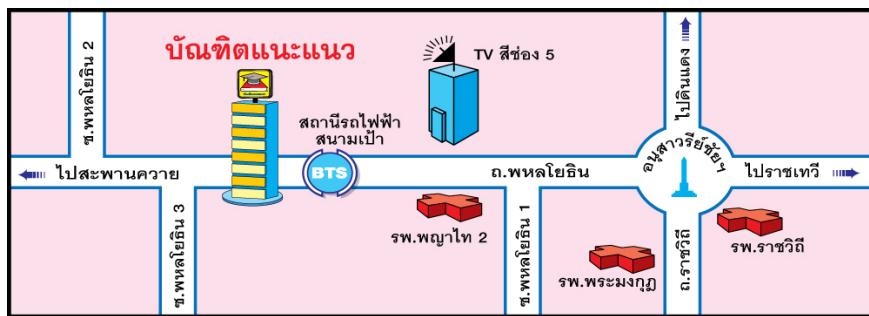


ทฤษฎีบทที่ 5 ด.ด.ด. คือ สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสามด้าน ด้านต่อด้าน สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



โปรดทราบ!

ตัวอย่างนี้จะโชว์เฉพาะหน้า 1-20 เท่านั้น
หากจะขอดูหนังสือทั้งเล่ม ต้องติดต่อที่
บัณฑิตแนะแนว (โทรศัพท์ 02-2794808)
หรือ ที่ร้านจำหน่ายหนังสือชั้นนำทั่วประเทศ



สำนักงานบัณฑิตแนะแนว 1033/4 ถ.พหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400

เวลาทำงาน 08.00-17.00 น. Website : www.bunditnaenaew.com

ฝ่ายประชาสัมพันธ์ เปิดทุกวัน (จันทร์-อาทิตย์) โทรศัพท์ 02-2794808 แฟกซ์ 02-6171820

ตรงตามหลักสูตรใหม่

1. ชุด TOP เป็นหนังสือสรุปเนื้อหาสำคัญของหลักสูตร ป.1-ม.3 ในแต่ละวิชาของแต่ละระดับชั้นพร้อมแบบฝึกหัดท้ายบท เหมาะสำหรับนักเรียนใช้อ่านทบทวนความรู้ก่อนมีประสิทธิภาพ เพื่อผลการสอบที่ยอดเยี่ยม จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 9 ชั้น ๆ ละ 5 วิชา คือ คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, ภาษาอังกฤษ, ภาษาไทย และสังคมศึกษา รวม 45 เล่ม ดังนี้



TOP ป.1-ป.3
ราคา 69 บาท



TOP ป.4-ป.6
ราคา 79 บาท



TOP ม.1-ม.3
ราคา 89 บาท

2. ชุด TEST เป็นหนังสือโจทย์แบบฝึกหัดเรียงตามบทเรียนแต่ละเรื่องของวิชานั้นๆ เหมาะสำหรับนักเรียนใช้ฝึกทำเพื่อทบทวนและพัฒนาความรู้ด้วยตัวเอง เพราะจะมีโจทย์ ที่ออกครอบคลุมทุกเรื่อง-ทุกประเด็น ครบถ้วนและพลิกแพลง ตั้งแต่ง่ายไปหายาก พร้อมเฉลยอย่างละเอียด จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 9 ชั้นชั้นละ 5 วิชาคือ คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, ภาษาอังกฤษ, ภาษาไทย และสังคมศึกษา รวม 45 เล่ม ดังนี้ (หนังสือชุดนี้จะเริ่มจำหน่าย 1 เม.ย. 51)



TEST ป.1-ป.3
ราคา 69 บาท



TEST ป.4-ป.6
ราคา 79 บาท



TEST ม.1-ม.3
ราคา 89 บาท

3. ชุด เตรียมสอบเข้าเรียนต่อ

เหมาะสำหรับนักเรียนชั้น ม.2-ม.3 เพื่ออ่านเตรียมสอบคัดเลือกเข้าเรียนต่อในแต่ละสถาบัน จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 3 เล่ม ดังนี้



ราคา 129 บาท



ราคา 199 บาท



ราคา 299 บาท

มีวางจำหน่ายที่ร้านหนังสือชั้นนำทั่วประเทศ หรือสั่งซื้อโดยตรงที่



บันทึกต้นแบบ 1033/4 ถ.พหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400
โทรศัพท์ 02-2794808 และ 02-6195844-5 แฟกซ์ 02-6171820-1



กว่า 25 ปี ในวงการศึกษากับ 4 ผลงานคุณภาพที่สร้างสรรค์เพื่อเยาวชนไทย

1 ศูนย์จัดสอบทางวิชาการ



จัดสอบด้วยข้อสอบมาตรฐานพร้อมกันทั่วประเทศ โดยแบ่งการสอบออกเป็น 3 กลุ่มตามระดับการศึกษา คือ PRE-ประถมศึกษา (ป.3-ป.6), PRE-มัธยมต้น (ม.1-ม.3) และ PRE-ADMISSIONS (ม.4-ม.6) เพื่อให้นักเรียนทราบระดับความสามารถทางวิชาการของตนเอง จนใช้เป็นแนวทางในการเลือกสถานศึกษาต่อและอาชีพได้อย่างเหมาะสม

2 ศูนย์ผลิตตำราและสำนักพิมพ์



ผลิตและจำหน่ายหนังสือคู่มือประกอบการเรียนตั้งแต่ประถม-มัธยมศึกษา ด้วยความโดดเด่นของเนื้อหาที่เข้าใจง่าย ตรงตามบทเรียน ทั้งเทอมต้น-เทอมปลาย เพิ่มศักยภาพในการเรียนสำหรับทุกช่วงชั้น

3 ศูนย์กวดวิชาแนวใหม่



รูปแบบใหม่ของการกวดวิชาเปิดสอนตั้งแต่ระดับประถม-ม.ปลาย ดำเนินการสอนโดยทีมอาจารย์ชั้นนำของประเทศที่มีเทคนิคการถ่ายทอดความรู้ให้เข้าใจง่าย เน้นให้นักเรียนสนุกกับการเรียน พร้อมกระบวนการสอบ เพื่อวัดความรู้ตลอดหลักสูตรและมีเจ้าหน้าที่แนะแนวคอยดูแลอย่างใกล้ชิด

4 ศูนย์บริการด้านแนะแนว



การริเริ่มและบุกเบิกงานแนะแนวที่เปิดให้บริการแก่โรงเรียน, ครู, ผู้ปกครอง และนักเรียนทั่วประเทศ กว่า 20 ปีที่ผ่านมาเป็นผลงานอีกด้านที่เราภูมิใจ ทั้งในเรื่องของการรวบรวมข้อมูล, ข่าวสาร และผลิตสื่อวัสดุต่างๆ ทางด้านแนะแนวออกเผยแพร่ รวมถึงการให้คำปรึกษาด้านแนะแนวฟรี

เราภาคภูมิใจที่ไม่ย่อ

ISBN 978-974-13-9361-9



ราคา 109 บาท