



พีชคณิต

คิดเพื่อชาติ

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{81}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{81}}$

$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{81}}$

$x^4 - 4y^2 = [x^2 - 2y][x^2 + 2y]$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{81}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{81}}$

$x^4 - 4y^2 = [x^2 - 2y][x^2 + 2y]$

$2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{AB} + \frac{A^2+B^2+C^2}{BC} + \frac{A^2+B^2+C^2}{CA}$

ใหม่ล่าสุด ! เพื่อใช้ทบทวนความรู้ และ เตรียมตัวสอบอย่างได้พล

- สรุปเนื้อหา พีชคณิต พร้อมนิยาม กฎ สูตร อย่างครบถ้วน ทั้งในระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษาตอนต้น
- รวมโจทย์เด่นจากค่ายคณิตศาสตร์กว่า 20 ประเทศ และโจทย์แข่งขันระดับนานาชาติ (โอลิมปิกวิชาการ ฯลฯ)
- เฉลยอย่างละเอียดครบทุกข้อ พร้อมเทคนิคการแก้ไขโจทย์ปัญหาที่กระชับ ตรงประเด็น แต่อ่านเข้าใจได้ง่าย
- เหมาะสำหรับครูใช้เป็นคู่มือสร้างแบบทดสอบขั้นสูง และนักเรียนใช้อ่านเตรียมตัวสอบแข่งขันระดับประเทศ



คำนำ

ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เป็นปัจจัยประการสำคัญในการขับเคลื่อนประเทศให้ก้าวพ้นจากความล้าหลัง อ่อนแอ ไปสู่สังคมใหม่ที่มีความทันสมัย แข็งแรง เปรียบพร้อมด้วยเสถียรภาพและพลังอำนาจ ทั้งในด้านการศึกษา การเมือง การทหาร เศรษฐกิจ การค้า และการลงทุน

สำหรับประเทศไทย แม้ในช่วงสองทศวรรษที่ผ่านมาจะได้อาศัยความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เป็นพื้นฐานในการเปลี่ยนผ่านจากประเทศกำลังพัฒนา ไปสู่ประเทศอุตสาหกรรมใหม่ที่สามารถพึ่งพาตนเองได้ในหลายๆ ด้าน แต่ก็ยังมีอาจติดเทียมกับนานาอารยประเทศ จำเป็นอย่างยิ่งที่ทุกหน่วยงาน/องค์กร จะผนึกกำลังกันในการสร้างจิตสำนึก และผลักดันให้คนในชาติ โดยเฉพาะเยาวชนได้ตระหนัก ตื่นตัว หันมาสนใจใฝ่เรียนรู้วิทยาการ และประดิษฐ์คิดค้นนวัตกรรมใหม่ๆ อย่างต่อเนื่อง

การจัดพิมพ์หนังสือ “พีชคณิตคิดเพื่อชาติ” เล่มนี้ เป็นส่วนหนึ่งของปณิธานร่วมในการกระตุ้นและส่งเสริมเยาวชนในวัยเรียนรวมทั้งผู้ที่สนใจใฝ่รู้ ให้ได้มีโอกาสฝึกคิดเพื่อแก้ไขโจทย์ปัญหาใหม่ๆ ที่ยังไม่แพร่หลาย ซึ่งผู้เขียนได้เพียรพยายามรวบรวมจากค่ายคณิตศาสตร์ประเทศต่างๆ รวมทั้งโจทย์ที่ใช้ในการแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ (โอลิมปิกวิชาการ) โดยใช้พื้นฐานความรู้ไม่เกินมัธยมศึกษาตอนต้น

อนึ่งหนังสือเล่มนี้เป็นผลงานชุดที่สองของผู้เขียน จะคู่กับชุดแรกคือ “เรขาคณิตคิดไม่ยาก” ซึ่งใช้ความรู้ไม่เกินมัธยมศึกษาตอนต้นในการแก้ไขโจทย์ปัญหาระดับนานาชาติเช่นเดียวกัน

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะมีส่วนช่วยกระตุ้นต่อมคิด สร้างความอยากรู้-อยากเห็นความท้าทายใหม่ๆ ทางวิชาการ และสานฝันเยาวชนไทยให้มีจินตนาการที่ก้าวไกล เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างไม่มีสิ้นสุด

สำนักงานบัณฑิตแนะแนว

พีชคณิตคิดเพื่อชาติ

กองบรรณาธิการ : ไพจิตร ศุภพิมล สุตาภทรร ชัยชนะ ปรีนทร เสนไสย์
กัญญาณัฐ ฟูผล พิรสิทธิ์ ตรีสุทธาชีพ

คอมพิวเตอร์ : เพียว บ้านชอง สุจิตตา ไชยจันลา สาริกา โกยรัมย์

ศิลปกรรม : บุญเลิศ จันทรรณาค อธิยุทธ พงษ์ศิริรัตน์ ปรีดาวรรณ ชลชีพ
สันติ วิเศษสุทธิ ณรงค์ศักดิ์ รอดนาค

เจ้าของ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว

เลขที่ 1033/4 ถนนพหลโยธิน แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กทม. 10400

โทรศัพท์ 02-2794808 และ 02-6195844 แฟกซ์ 02-6171820

พิมพ์ที่ : ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์

เลขที่ 195/6 หมู่ 5 ซอยพุทธบูชา 44 แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กทม. 10140 โทรศัพท์ 02-8706301-3

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ พ.ศ. 2537 : ห้ามลอกเลียน คัดลอก จัดพิมพ์ หรือทำซ้ำ

ไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

คำปรารภของผู้เขียน

หนังสือ **พิชคณิดคิดเพื่อชาติ** เล่มนี้ได้รวบรวมโจทย์พิชคณิต ซึ่งประเทศต่างๆ ใช้ในการแข่งขัน เพื่อคัดเลือกนักเรียนในแต่ละประเทศนั้นๆ เพื่อเป็นตัวแทนของประเทศไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิก ซึ่งผู้เขียนเห็นว่าเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนและผู้สนใจที่จะฝึกทักษะ กระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหา อันเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้เกิดการพัฒนาการทางด้านคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผู้เขียนขอขอบพระคุณคณาจารย์ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา ซึ่งให้กำลังใจและคำปรึกษา สุดท้ายผู้เขียนหวังว่าหนังสือ **พิชคณิดคิดเพื่อชาติ** เล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้ศึกษาค้นคว้าไม่มากนักน้อย

ไมตรี ศรีทองแท้



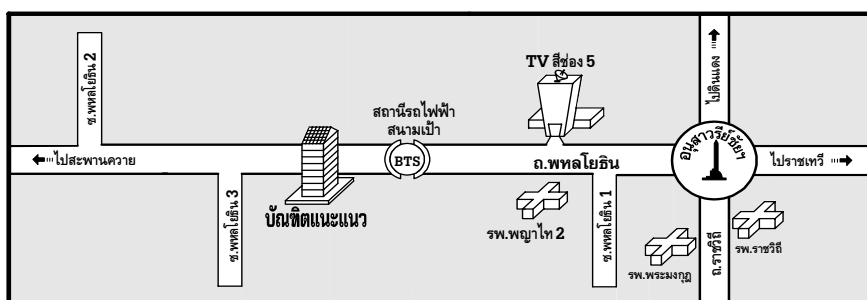
อาจารย์ไมตรี ศรีทองแท้ เป็นบุคลากรที่มีบทบาทสำคัญท่านหนึ่ง ซึ่งคร่ำหวอดในค่ายคณิตศาสตร์โอลิมปิกมานาน ท่านจบการศึกษาด้านคณิตศาสตร์จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร และเป็นลูกศิษย์ของศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ บันนิม ผู้ปลุกปั้นบุคลากรที่มีชื่อเสียงทางคณิตศาสตร์

ปัจจุบันอาจารย์ไมตรี ศรีทองแท้ เป็นอาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา และได้รับมอบหมายหน้าที่เพิ่มในการสอนและดูแลนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ (GIFTED) ของโรงเรียน



สารบัญ

☆	สรุปเนื้อหา	
-	เลขยกกำลัง.....	4
-	การแยกตัวประกอบของพหุนาม.....	7
-	พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม.....	15
-	สมการกำลังสอง.....	22
☆	แบบทดสอบ.....	27
☆	เฉลย.....	112
☆	บรรณานุกรม.....	191



สำนักงานบัณฑิตแนะแนว 1033/4 ถ.พหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400

Website : www.bunditnaeaw.com แฟกซ์อัตโนมัติ 02-6171820 และ 02-2796611

ฝ่ายประชาสัมพันธ์ โทรศัพท์ 02-2794808 เปิดทำการทุกวัน (จันทร์-อาทิตย์) เวลา 08.00-17.00 น.

ฝ่ายประสานงานโรงเรียน-ร้านค้า โทรศัพท์ 02-2794433 เฉพาะวันจันทร์-วันศุกร์ เวลา 08.00-17.00 น.

เลขยกกำลัง

1. ความหมายของเลขยกกำลัง

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง** ที่มี a เป็น **ฐาน** (Base) และ n เป็น **เลขชี้กำลัง** (Exponent)

อ่าน a^n ว่า “**a ยกกำลัง n**” หรือ “**a กำลัง n**”

เช่น $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$ อ่านว่า “สามยกกำลังเจ็ด”

$\left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{5}{9}\right) = \left(-\frac{5}{9}\right)^4$ อ่านว่า “ลบเศษห้าส่วนเก้า
ทั้งหมดยกกำลังสี่”

$t \times t \times t \times t \times t = t^5$ อ่านว่า “t ยกกำลังห้า”

หมายเหตุ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1 ไม่นิยมเขียนเลขชี้กำลังกำกับไว้

เช่น x^1 โดยทั่วไปมักจะเขียนว่า x ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกัน

2. สมบัติของเลขยกกำลัง

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (สมบัติการคูณเลขยกกำลัง)
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (สมบัติการหารเลขยกกำลัง)
3. $(a^m)^n = a^{mn}$ (เลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขยกกำลัง)
4. $(ab)^n = a^n b^n$ (เลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการคูณของเลขหลายจำนวน)
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$ (เลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการหารของเลขหลายจำนวน)
6. $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ และ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ เมื่อ $a \neq 0$
7. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $a \geq 0$
 $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ
8. $a^m = a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m = n$
9. $a^m = b^m$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ หรือ $m = 0$



3. การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

ตัวอย่างที่ 1 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $\frac{(81^{n-1})8^n(3^{n+4})}{27^n(4^n)(3^n)^2(2^n)}$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{(81^{n-1})8^n(3^{n+4})}{27^n(4^n)(3^n)^2(2^n)} &= \frac{(3^4)^{n-1}(2^3)^n(3^{n+4})}{(3^3)^n(2^2)^n(3^{2n})(2^n)} \\ &= \frac{3^{4n-4} \cdot 2^{3n} \cdot 3^{n+4}}{3^{3n} \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 2^n} \\ &= 3^{(4n-4)+(n+4)-3n-2n} \cdot 2^{3n-2n-n} \\ &= 3^0 \cdot 2^0 \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $5^0 + (0.125)^{-1/3} - (25^{-1/2})(125^{1/3})(0.0625^{1/4})$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{ผลลัพธ์} &= 5^0 + (0.5^3)^{-1/3} - (5^2)^{-1/2}(5^3)^{1/3}(0.5^4)^{1/4} \\ &= 1 + (0.5)^{-1} - (5^{-1}) \cdot (5^1) \cdot (0.5^1) \\ &= 1 + \frac{1}{0.5} - (5^{-1+1}) \cdot (0.5) \\ &= 1 + 2 - 5^0(0.5) \\ &= 1 + 2 - 1(0.5) \\ &= 2.5\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $4^{2^3} - (4^2)^3$

วิธีทำ

เนื่องจาก $4^{2^3} = (4^2)^3$ [4^{2^3} มี 4 เป็นฐาน และ 2^3 เป็นเลขชี้กำลัง]

$$= (4)^{2 \times 2 \times 2} = 4^8$$

และ $(4^2)^3 = 4^{2 \times 3}$ [$(4^2)^3$ มี 4^2 เป็นฐาน และ 3 เป็นเลขชี้กำลัง]

$$= 4^6$$

ดังนั้น $4^{2^3} - (4^2)^3 = 4^8 - 4^6$

$$= 4^6(4^2 - 1)$$

$$= 15 \times 4^6$$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $5^{2x} = \frac{1}{625}$ แล้ว $(216)^{-x/3}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ

จาก $5^{2x} = \frac{1}{625}$

$$(5^2)^x = \frac{1}{(5^2)^2} = (5^2)^{-2}$$

จะได้ $x = -2$

$$\therefore (216)^{-x/3} = (6^3)^{-(-2)/3} = 6^2 = 36$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$

วิธีทำ สมมติให้ $x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$
 ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง ; $x^2 = 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$
 $= 12 + x$
 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x - 4)(x + 3) = 0$
 $x = 4$ หรือ -3
 แต่ $x = -3$ **ไม่จริง** เพราะโจทย์ให้หาค่ารากเฉพาะส่วนที่เป็น**บวก**ของจำนวนจริงบวก
 นั่นคือ $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}} = 4$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \dots}}}$

วิธีทำ สมมติให้ $y = \sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \dots}}}$
 ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง ; $y^2 = 5 \sqrt{5 \sqrt{5 \dots}}$
 $= 5y$
 $y^2 - 5y = 0$
 $y(y - 5) = 0$
 $y = 0$ หรือ 5
 แต่ $y = 0$ **ไม่จริง** เพราะโจทย์ให้หาค่ารากเฉพาะส่วนที่เป็น**บวก**ของจำนวนจริงบวก
 นั่นคือ $\sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \dots}}} = 5$

ตัวอย่างที่ 7 จงเรียงลำดับจำนวนจาก**น้อยไปมาก**

(1) 4^{80} , 5^{60} และ 6^{40}

(2) $2^{1/3}$, $3^{1/4}$ และ $5^{1/6}$

วิธีทำ (1) พิจารณา $4^{80} = (4^4)^{20} = (256)^{20}$
 $5^{60} = (5^3)^{20} = (125)^{20}$
 $6^{40} = (6^2)^{20} = (36)^{20}$
 เรียงลำดับค่าจาก**น้อยไปมาก** ดังนี้ $6^{40} < 5^{60} < 4^{80}$
 (2) พิจารณา $2^{1/3} = (2^{1/3})^{4/4} = (2^4)^{1/12} = (16)^{1/12}$
 $3^{1/4} = (3^{1/4})^{3/3} = (3^3)^{1/12} = (27)^{1/12}$
 $5^{1/6} = (5^{1/6})^{2/2} = (5^2)^{1/12} = (25)^{1/12}$
 เรียงลำดับค่าจาก**น้อยไปมาก** ดังนี้ $2^{1/3} < 5^{1/6} < 3^{1/4}$



การแยกตัวประกอบของพหุนาม

1. ทบทวนความหมายการแยกตัวประกอบของพหุนาม

การแยกตัวประกอบของพหุนาม หมายถึง การเขียนพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าหรือเขียนพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปที่ง่ายกว่า

- (1) $\underbrace{x^2 - 5x + 6}_{\text{พหุนามดีกรี 2}} = \underbrace{(x - 3)(x - 2)}_{\substack{\text{พหุนามดีกรี 1} \\ \text{พหุนามดีกรี 1}}} \Rightarrow$ แสดงการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า เรียก $x - 3$ และ $x - 2$ ว่า **ตัวประกอบ** ของ $x^2 - 5x + 6$
- (2) $\underbrace{4x - 16}_{\text{พหุนามดีกรี 1}} = \underbrace{4}_{\text{พหุนามดีกรี 0}} \underbrace{(x - 4)}_{\text{พหุนามดีกรี 1}} \Rightarrow$ แสดงว่า $4(x - 4)$ เป็นรูปที่ง่ายกว่าของ $4x - 16$ เรียก 4 และ $x - 4$ ว่า **ตัวประกอบ** ของ $4x - 16$
- (3) $\underbrace{15x^2 - 5x - 70}_{\text{พหุนามดีกรี 2}} = \underbrace{5}_{\text{พหุนามดีกรี 0}} \underbrace{(3x^2 - x - 14)}_{\text{พหุนามดีกรี 2}} \Rightarrow$ แม้จะอยู่ในรูปที่ง่ายกว่า แต่ยังไม่สำเร็จเพราะสามารถแยกตัวประกอบของ $3x^2 - x - 14$ ได้อีก โดยเขียนในรูปการคูณกันของ $(3x - 7)$ และ $(x + 2)$ เรียก 5, $(3x - 7)$ และ $(x + 2)$ ว่า **ตัวประกอบ** ของ $15x^2 - 5x - 70$
- $= \underbrace{5}_{\text{พหุนามดีกรี 0}} \underbrace{(3x - 7)(x + 2)}_{\substack{\text{พหุนามดีกรี 1} \\ \text{พหุนามดีกรี 1}}}$

2. วิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม

2.1 ดึงตัวประกอบร่วม (Common factor) โดยใช้สมบัติการแจกแจง

ถ้า a, b, c และ d เป็นพหุนามที่มี a เป็น **ตัวประกอบร่วม**

จะได้ $ab + ac + ad = a(b + c + d)$ หรือ $ba + ca + da = (b + c + d)a$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- วิธีทำ**
- (1) $3a + 9 = 3a + 3(3) = 3(a + 3)$ 3 เป็นตัวประกอบร่วม
- (2) $8 - 4a = 4(2) - 4a = 4(2 - a)$ 4 เป็นตัวประกอบร่วม
- (3) $6x^2 + 12 = 6x^2 + 6(2) = 6(x^2 + 2)$ 6 เป็นตัวประกอบร่วม
- (4) $4x^2 + 2x = 2x(2x) + 2x = 2x(2x + 1)$ 2x เป็นตัวประกอบร่วม
- (5) $7m^2 - 21m = 7m(m) - 7m(3) = 7m(m - 3)$ 7m เป็นตัวประกอบร่วม
- (6) $a^2b^3c - a^3b^2c^4 + ab^5c^3 = ab^2c[ab - a^2c^3 + b^3c^2]$ ab^2c เป็นตัวประกอบร่วม

2.2 ใช้วิธีการจัดกลุ่มแล้วดึงตัวประกอบร่วม โดยอาศัยสมบัติการแจกแจง

สมบัติการแจกแจง เมื่อ a, b, c และ d เป็นพหุนาม

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d \quad \text{หรือ} \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (1) \quad ax - bx + by + cy - cx - ay &= (ax - bx - cx) - (ay - by - cy) \\ &= x(a - b - c) - y(a - b - c) \\ &= (a - b - c)(x - y) \end{aligned}$$

$(a - b - c)$ เป็น
ตัวประกอบร่วม

$$\begin{aligned} (2) \quad x^3 + 2ax^2 + 2a^2x + 4a^3 &= (x^3 + 2ax^2) + (2a^2x + 4a^3) \\ &= x^2(x + 2a) + 2a^2(x + 2a) \\ &= (x + 2a)(x^2 + 2a^2) \end{aligned}$$

$(x + 2a)$ เป็น
ตัวประกอบร่วม

2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สูตร

1. กำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A - B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\ (A + B + C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA \end{aligned}$$

2. ผลต่างกำลังสอง

$$\begin{aligned} (A - B)(A + B) &= A^2 - B^2 \\ A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B) \end{aligned}$$

3. กำลังสามสมบูรณ์

$$\begin{aligned} (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A - B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \end{aligned}$$

4. ผลต่างกำลัง n เมื่อ $n \geq 3$

$$\begin{aligned} A^3 - B^3 &= (A - B)(A^2 + AB + B^2) \\ A^n - B^n &= (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + A^{n-4}B^3 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}) \end{aligned}$$

5. ผลบวกกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A + B)(A^2 - AB + B^2) \\ A^5 + B^5 &= (A + B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) \\ A^n + B^n &= (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - A^{n-4}B^3 + \dots - AB^{n-2} + B^{n-1}) \end{aligned}$$

6. สูตรอื่นๆ

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC &= (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \\ \text{ถ้า } A + B + C &= 0 \text{ จะได้ } A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^2 + 2xy + y^2 - z^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) - z^2 \\
 &= (x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z) \\
 (2) \quad a^2 + 2a - 4b^2 + 8bc - 4c^2 + 1 &= (a^2 + 2a + 1) - (4b^2 - 8bc + 4c^2) \\
 &= (a + 1)^2 - (2b - 2c)^2 \\
 &= [(a + 1) + (2b - 2c)][(a + 1) - (2b - 2c)] \\
 &= (a + 1 + 2b - 2c)(a + 1 - 2b + 2c) \\
 (3) \quad (a + b)^3 + (a - b)^3 &= [(a + b) + (a - b)][(a + b)^2 - (a + b)(a - b) + (a - b)^2] \\
 &= (a + b + a - b)(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= (2a)(a^2 + 3b^2) \\
 (4) \quad \frac{a^2}{b} - \frac{64b^2}{a} &= \frac{a^3 - 64b^3}{ab} = \frac{(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)}{ab}
 \end{aligned}$$

2.4 การแยกตัวประกอบของพหุนามแบบสามพจน์แยกเป็นสองวงเล็บคูณกัน

พหุนาม $ax^2 + bx + c$ ที่มี ax^2 เป็นพจน์หน้า bx เป็นพจน์กลาง และ c เป็นพจน์ท้าย สามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวประกอบสองวงเล็บโดยใช้สมบัติการแจกแจง ดังนี้

2.4.1 พหุนามที่อยู่ในรูป $x^2 + bx + c$

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q) \text{ เมื่อ } pq = c \text{ และ } p + q = b$$

เช่น ถ้าจะแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 7x + 12$ ทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบของพจน์หน้า คือ x^2 เป็น x กับ x แล้วใส่เป็นพจน์หน้าในแต่ละวงเล็บ

$$x^2 + 7x + 12 = (x \dots \dots \dots)(x \dots \dots \dots)$$

ขั้นที่ 2 แยกตัวประกอบของพจน์ท้าย คือ $+12$ ให้อยู่ในรูป $p \times q$ ซึ่งได้หลายแบบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 +12 &= 1 \times 12 & +12 &= (-1) \times (-12) \\
 +12 &= 2 \times 6 & +12 &= (-2) \times (-6) \\
 +12 &= 3 \times 4 & +12 &= (-3) \times (-4)
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 เลือกแบบซึ่ง $p + q$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์กลางในโจทย์ (b) ซึ่งในที่นี้ คือ $3 + 4 = 7$

$$\therefore x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

สรุป รูปแบบการแยกตัวประกอบแบบสามพจน์แยกเป็น 2 วงเล็บคูณกันเป็นดังนี้

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 12 & \\
 x^2 & \swarrow & \searrow \\
 (x+3) & & (x+4) \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
 & 3x & 4x & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & 7x & &
 \end{array}
 \end{array}$$

ในกรณีที่พจน์ท้ายเป็นลบ ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน เช่น จะแยกตัวประกอบของ $x^2 + 11x - 12$

ขั้นที่ 1 $x^2 + 11x - 12 = (x \dots)(x \dots)$

ขั้นที่ 2 แยกตัวประกอบของ -12 ซึ่งได้หลายแบบ

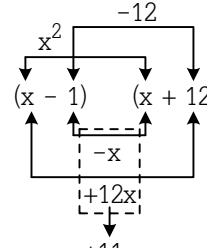
$$-12 = 1 \times (-12) \quad -12 = 2 \times (-6) \quad -12 = 3 \times (-4)$$

$$-12 = (-1) \times 12 \quad -12 = (-2) \times 6 \quad -12 = (-3) \times (4)$$

ขั้นที่ 3 เลือกแบบที่ $p + q = b$ ซึ่งในที่นี้ คือ $(-1) + 12 = 11$

$$\therefore x^2 + 11x - 12 = (x - 1)(x + 12)$$

สรุป รูปแบบ

$$x^2 + 11x - 12 = (x - 1)(x + 12)$$


2.4.2 พหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$

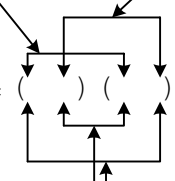
$$ax^2 + bx + c = (px + q)(sx + t) \quad \text{เมื่อ } ps = a, qt = c \text{ และ } pt + qs = b$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $ax^2 + bx + c$ ทำได้เช่นเดียวกับพหุนามในรูป $x^2 + bx + c$ เพียงแต่ต้องพิจารณาพจน์หน้าอย่างละเอียดเช่นเดียวกับพิจารณาพจน์ท้าย ทำให้มีความยุ่งยากมากกว่ากรณีที่สัมประสิทธิ์ของพจน์หน้าเป็น 1 ดังที่กล่าวแล้วข้างต้น

เช่น จะแยกตัวประกอบของ $20x^2 + 16x - 21$

สังเกตว่า พจน์หน้าแยกได้หลายแบบ ได้แก่ x กับ $20x$, $2x$ กับ $10x$ หรือ $4x$ กับ $5x$ และพจน์ท้ายก็เช่นเดียวกัน ทั้งนี้การแยกตัวประกอบจะถูกตัดทิ้งเมื่อ

ผลคูณเท่ากับพจน์หน้า ผลคูณเท่ากับพจน์ท้าย

$$20x^2 + 16x - 21 = (\quad) (\quad)$$


ผลคูณบวกกันเท่ากับพจน์กลาง

$$\therefore 20x^2 + 16x - 21 = (2x + 3)(10x - 7)$$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$ เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$



2.5 การแยกตัวประกอบโดยวิธีการทำกำลังสองสมบูรณ์

2.5.1 การทำกำลังสองสมบูรณ์โดยการเพิ่มพจน์กลาง มีวิธีการดังนี้

1. ลักษณะของโจทย์เหมือนกับโจทย์ที่แยกโดยวิธีสามพจน์แยกเป็นสองวงเล็บคูณกัน
2. พจน์หน้าและพจน์ท้ายของโจทย์จะมีเครื่องหมายเหมือนกันและถอดรากที่สองได้ลงตัว
3. พจน์กลางที่นำมาจะเพิ่มในโจทย์ โดยการบวกหรือลบหาได้จาก

$$\text{พจน์กลาง} = 2\sqrt{(\text{พจน์หน้า})} \sqrt{(\text{พจน์ท้าย})}$$

4. จัดสามพจน์แรกให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์
5. แยกตัวประกอบต่อโดยวิธีผลต่างกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

(1) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

(2) $64m^4 + 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2\sqrt{x^4 \cdot y^4} + y^4 + x^2y^2 - 2\sqrt{x^4 \cdot y^4} \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

พจน์กลาง
ที่นำมาเพิ่ม

$$\begin{aligned} (2) \quad 64m^4 + 1 &= [(8m^2)^2 + 2\sqrt{64m^4 \cdot \sqrt{1}} + 1] - 2\sqrt{64m^4 \cdot \sqrt{1}} \\ &= [(8m^2)^2 + 2(8m^2)(1) + (1)^2] - 2(8m^2)(1) \\ &= (8m^2 + 1)^2 - (4m)^2 \\ &= [(8m^2 + 1) - 4m][(8m^2 + 1) + 4m] \\ &= (8m^2 - 4m + 1)(8m^2 + 4m + 1) \end{aligned}$$

พจน์กลาง
ที่นำมาเพิ่ม

2.5.2 การทำกำลังสองสมบูรณ์โดยการเพิ่มพจน์ท้าย มีวิธีการดังนี้

1. ลักษณะโจทย์เหมือนกับโจทย์ที่แยกโดยวิธีสามพจน์แยกเป็นสองวงเล็บ
2. สัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสูงสุดต้องเป็น 1
3. พจน์ท้ายที่นำมาบวกเข้า และลบออกจากโจทย์หาได้จาก **พจน์ท้าย** = $\left(\frac{\text{พจน์กลาง}}{2\sqrt{\text{พจน์หน้า}}} \right)^2$
4. จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์
5. แยกตัวประกอบต่อโดยผลต่างกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 5 จงหาตัวประกอบของ

(1) $x^2 + 18x - 360$

(2) $2x^2 + 21x - 36$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^2 + 18x - 360 &= \{x^2 + 18x + (9)^2\} - 360 - (9)^2 \\
 &= \{x^2 + 18x + 81\} - 441 \\
 &= (x + 9)^2 - (21)^2 \\
 &= (x + 9 + 21)(x + 9 - 21) \\
 &= (x + 30)(x - 12)
 \end{aligned}$$

 พจน์ท้าย
ที่นำมาเพิ่ม

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 2x^2 + 21x - 36 &= 2 \left[x^2 + \frac{21x}{2} - 18 \right] \\
 &= 2 \left[\left\{ x^2 + \frac{21x}{2} + \left(\frac{21}{4} \right)^2 \right\} - 18 - \left(\frac{21}{4} \right)^2 \right] \\
 &= 2 \left[\left(x + \frac{21}{4} \right)^2 - \left(18 + \frac{441}{16} \right) \right] \\
 &= 2 \left[\left(x + \frac{21}{4} \right)^2 - \left(\frac{27}{4} \right)^2 \right] \\
 &= 2 \left(x + \frac{21}{4} + \frac{27}{4} \right) \left(x + \frac{21}{4} - \frac{27}{4} \right) \\
 &= 2(x + 12) \left(x - \frac{3}{2} \right) \\
 &= 2(x + 12) \left(\frac{2x - 3}{2} \right) \\
 &= (x + 12)(2x - 3)
 \end{aligned}$$

 พจน์ท้าย
ที่นำมาเพิ่ม



2.6 การแยกตัวประกอบแบบระคน

เป็นการแยกตัวประกอบโดยอาจใช้หลายวิธีดังกล่าวข้างต้นในข้อเดียวกัน เช่น ดึงตัวประกอบร่วม ใช้สูตรแยก 3 พจน์เป็น 2 วงเล็บคูณกัน หรือทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ

$$(1) \quad x^4 - y^4 + x^3 + x^3y - xy^3 - y^3$$

$$(2) \quad (x^2 + x)^2 - 17(x^2 + x) + 72$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4 - y^4 + x^3 + x^3y - xy^3 - y^3 &= (x^4 - xy^3) + (x^3y - y^4) + (x^3 - y^3) \\ &= x(x^3 - y^3) + y(x^3 - y^3) + (x^3 - y^3) \\ &= (x^3 - y^3)(x + y + 1) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x^2 + x)^2 - 17(x^2 + x) + 72 &= [(x^2 + x) - 9][(x^2 + x) - 8] \\ &= (x^2 + x - 9)(x^2 + x - 8) \end{aligned}$$

2.7 การแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ข้อสังเกต 1. เรียกพหุนาม $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ ว่า $f(x)$

$$\text{เช่น} \quad f(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - x - 1$$

2. $f(a)$ คือ การหาค่า $f(x)$ เมื่อแทนค่า x ด้วย a

$$\text{เช่น} \quad f(x) = x^2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ กล่าวว่า ถ้า $f(x)$ ถูกหารด้วย $x - a$ จนเศษที่เหลือ ไม่มีเทอม x ปนอยู่ เศษที่เหลือเท่ากับ $f(a)$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเศษที่เหลือจากการหาร $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ ให้ $x + 1 = 0$ จะได้

$$x = -1$$

จาก

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$$

$$\therefore f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) - 5$$

$$= -9$$

$$\text{เศษ} = -9$$



ทฤษฎีตัวประกอบ ถ้าแทน x ด้วย a ลงใน $f(x)$ แล้วทำให้ $f(a) = 0$
แล้ว $x - a$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(x)$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
หาค่า a จากจำนวนเต็มหารพหุนามดีกรีศูนย์ในโจทย์ (คือ 6) ลงตัวซึ่งอาจเป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ หรือ ± 6
ทดลองเลือกค่า $x = -1$; ได้ $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$
$$= -1 + 6 - 11 + 6$$
$$= 0$$

นั่นคือ เมื่อ $x = -1$ ทำให้ $f(-1) = 0$ แสดงว่า $x + 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$\begin{aligned}\therefore x^3 + 6x^2 + 11x + 6 &= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x + 1)(x + 2)(x + 3)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $3x^3 - 4x^2 + ax + b$ ถูกหารด้วย $x^2 - 1$ ได้ลงตัว จงหาค่าของ a, b

วิธีทำ $\frac{3x^3 - 4x^2 + ax + b}{x^2 - 1}$ ลงตัว $\because x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
 $\therefore (x - 1)$ และ $(x + 1)$ หาร $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + ax + b$ ลงตัว
$$\therefore f(-1) = 3(-1)^3 - 4(-1)^2 + a(-1) + b = 0$$
$$b - a = 7 \quad \dots(1)$$
$$f(1) = 3(1)^3 - 4(1)^2 + a(1) + b = 0$$
$$a + b = 1 \quad \dots(2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) ; จะได้ $a = -3$, $b = 4$



พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม

1. นิพจน์ (Expression)

นิพจน์ หมายถึง ข้อความหรือประโยคสัญลักษณ์ ประกอบด้วยค่าคงตัวและตัวแปร

เช่น $2x - 3$, 14 , $\frac{5}{y}$ และ $z^2 - 6z + 9$ เป็นต้น

2. เอกนาม (Monomial)

เอกนาม คือ นิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปผลคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป โดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรต้องเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก

ดีกรีของเอกนาม คือ ผลบวกของเลขชี้กำลังทั้งหมดของตัวแปรในเอกนาม

เช่น

เอกนาม	ค่าคงตัว	ตัวแปร	ดีกรีของเอกนาม
$-\frac{4}{7}x^2y^2$	$-\frac{4}{7}$	x, y	4
6abc	6	a, b, c	3
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-	0
0	0	-	ไม่กำหนด

- **หมายเหตุ**
1. สำหรับค่าคงตัว เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของเอกนาม
 2. สำหรับเอกนาม $-\frac{1}{3}$, 0 ไม่ทราบตัวแปรที่แน่นอน
 3. ไม่กล่าวถึงดีกรีของเอกนาม 0 เพราะ $0 = 0 \times a^n$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

3. เอกนามที่คล้ายกัน

เอกนามสองเอกนามใด จะคล้ายกัน ได้ก็ต่อเมื่อ

1. เอกนามสองเอกนามนั้นจะต้องมีตัวแปรชุดเดียวกัน และ
2. เลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันในเอกนามทั้งสองต้องเท่ากัน

เช่น $3a^2$ คล้ายกับ $-\frac{1}{2}a^2$, $16a^3b^2c$ คล้ายกับ $-16a^3b^2c$
 $0.5x^2y$ คล้ายกับ $-\frac{1}{2}x^2y$, 13 คล้ายกับ 10

4. การบวก-การลบเอกนามที่คล้ายกัน

เอกนามสองเอกนามใดจะมารวมกันได้ ก็ต่อเมื่อเอกนามทั้งสองจะต้องเป็นเอกนามที่คล้ายกัน

$$\begin{aligned}\text{ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกัน} &= \text{ผลบวกของสัมประสิทธิ์} \times \text{ส่วนของตัวแปร} \\ \text{ผลต่างของเอกนามที่คล้ายกัน} &= \text{ผลต่างของสัมประสิทธิ์} \times \text{ส่วนของตัวแปร}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{เช่น } 7a + (3a - 2a) & = & 7a + (a) \\ & = & 7a + a \\ & = & 8a \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} 6x^2 - (2x^2 - 5x^2) & = & 6x^2 - 2x^2 + 5x^2 \\ & = & 11x^2 - 2x^2 \\ & = & 9x^2 \end{array}\right.$$

5. พหุนาม (Polynomial)

พหุนาม คือ เอกนามหรือกลุ่มผลรวมของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป

เช่น $-\frac{7}{3}$, $13a - 4$, $x^2 + y^2$, $\frac{8a^2}{15} + a^3 + \frac{1}{3}a - 7$ และ $-19a^2b^2c^2 - 1$ เป็นต้น

เอกนามแต่ละเอกนามของพหุนามเรียกว่า **พจน์**

พหุนามในรูปผลสำเร็จ หมายถึง พหุนามที่ไม่มีพจน์ใดคล้ายกัน

ดีกรีของพหุนาม คือ ดีกรีสูงสุดของพจน์ในพหุนามที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\begin{array}{lcl} \text{เช่น } -\frac{7}{3} & \text{เป็นพหุนามดีกรี } 0 & , \quad \frac{8a^2}{15} + a^3 + \frac{1}{3}a - 7 \quad \text{เป็นพหุนามดีกรี } 3 \\ 13a - 4 & \text{เป็นพหุนามดีกรี } 1 & , \quad -19a^2b^2c^2 - 1 \quad \text{เป็นพหุนามดีกรี } 6 \\ x^2 + y^2 & \text{เป็นพหุนามดีกรี } 2 & , \quad \text{ในขณะที่ } 0 \text{ เป็นพหุนามที่เราจะไม่กล่าวถึงดีกรี}\end{array}$$

6. การบวกและการลบพหุนาม

การหาผลบวกระหว่างพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยนำพหุนามทั้งสองมาเขียนในรูปการบวกและถ้ามีพจน์ใดที่คล้ายกันก็ให้บวกพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน

การหาผลลบระหว่างพหุนามกับพหุนาม ทำได้โดยการบวกพหุนามที่เป็นตัวตั้งด้วยจำนวนตรงข้ามของพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวลบ

ตัวอย่าง จงหาผลบวกและผลลบของพหุนาม $9a^3 - 9b^3$, $8a^3 - 7a^2b + 5b^3$ โดยใช้พหุนามแรกเป็นตัวตั้ง

$$\begin{array}{lcl} \text{วิธีทำ} & \text{ผลบวก} & (9a^3 - 9b^3) + (8a^3 - 7a^2b + 5b^3) \\ & & = 9a^3 - 9b^3 + 8a^3 - 7a^2b + 5b^3 \\ & & = 9a^3 + 8a^3 - 7a^2b - 9b^3 + 5b^3 \\ & & = 17a^3 - 7a^2b - 4b^3 \\ & \text{ผลลบ} & (9a^3 - 9b^3) - (8a^3 - 7a^2b + 5b^3) \\ & & = 9a^3 - 9b^3 - 8a^3 + 7a^2b - 5b^3 \\ & & = 9a^3 - 8a^3 + 7a^2b - 9b^3 - 5b^3 \\ & & = a^3 + 7a^2b - 14b^3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \text{หรือ} \quad \begin{array}{r} 9a^3 \quad - 9b^3 \\ 8a^3 - 7a^2b + 5b^3 \\ \hline 17a^3 - 7a^2b - 4b^3 \end{array} + \begin{array}{r} 9a^3 \quad - 9b^3 \\ 8a^3 - 7a^2b + 5b^3 \\ \hline a^3 + 7a^2b - 14b^3 \end{array} - \end{array}$$

7. การคูณพหุนาม

1. เอกนาม $\times$ เอกนาม

ผลคูณ คือ (สัมประสิทธิ์ $\times$ สัมประสิทธิ์)(ตัวแปร $\times$ ตัวแปร) การคูณตัวแปร ใช้หลัก $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$\begin{array}{l} \text{ตัวอย่าง} \quad 3x^2y^3 \quad \text{คูณ} \quad 6x^4y = 18x^6y^4 \\ \quad \quad \quad \frac{-1}{2}xyz \quad \text{คูณ} \quad 7x^2y = \frac{-7}{2}x^3y^2z \end{array}$$

2. เอกนาม $\times$ พหุนาม

ใช้สมบัติการแจกแจง $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

$$\begin{array}{l} \text{ตัวอย่าง} \quad 12x^2y(5x^2 - 6xy + y^2) = 60x^4y - 72x^3y^2 + 12x^2y^3 \\ \quad \quad \quad -5ab(a^2 + 3ab - b^2) = -5a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \end{array}$$

3. พหุนาม $\times$ พหุนาม

ใช้สมบัติการแจกแจง $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$

$$= ac + bc + ad + bd$$

หรือ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$$\begin{array}{l} \text{ตัวอย่าง} \quad (x - 2)(3x^2 - 5) = (x)(3x^2) - (x)(5) - (2)(3x^2) - (2)(-5) \\ \quad \quad \quad = 3x^3 - 5x - 6x^2 + 10 \\ \quad \quad \quad = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 10 \end{array}$$



8. สูตรการคูณพหุนามที่สำคัญ

1. ผลต่างของกำลังสอง

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. กำลังสองสมบูรณ์

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

3. กำลังสามของผลบวกหรือผลต่าง

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

4. กำลังสองของพหุนาม 3 พจน์

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

5. ผลบวกหรือผลต่างของกำลังสาม

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

9. การหารพหุนาม

1. เอกนาม ÷ เอกนาม

ใช้หลักการหารเลขยกกำลัง $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ตัวอย่าง $\frac{10x^3y^2}{5xy^2} = 2x^2$, $\frac{-12x^4y^3}{9x^2y^2} = \frac{-4x^2y}{3}$

2. พหุนาม ÷ เอกนาม

ใช้หลัก $\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{4x^3 - 6x^2 + 10x}{2x} &= \frac{4x^3}{2x} - \frac{6x^2}{2x} + \frac{10x}{2x} \\ &= 2x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{15x^2y^2 + 10x^2y + 20xy^2}{5xy} &= \frac{15x^2y^2}{5xy} + \frac{10x^2y}{5xy} + \frac{20xy^2}{5xy} \\ &= 3xy + 2x + 4y \end{aligned}$$



3. พหุนาม ÷ พหุนาม

หลักการทำ

- เรียงพจน์ของพหุนามทั้งตัวตั้งและตัวหารจากกำลังมากไปหากำลังน้อย
- ใช้วิธีตั้งหาร ถ้าผลหารไม่มีเศษ (เหลือเศษศูนย์) เรียกว่า หารลงตัว ถ้าหากหารไปแล้วเหลือตัวตั้งมีดีกรี น้อยกว่าดีกรีของตัวหาร เรียกว่า หารไม่ลงตัว (เหลือเศษ)

ตัวอย่าง $2p^4 - 5p^2 - p + 1$ หารด้วย $p^2 - 2p - 1$

$$\begin{array}{r}
 \text{หาร } 2p^4 \text{ ด้วย } p^2 \text{ ได้ผลหาร } 2p^2 \\
 \downarrow \\
 2p^2 + 4p + 5 \text{ คือผลหาร} \\
 p^2 - 2p - 1 \overline{) 2p^4 - 5p^2 - p + 1} \\
 \underline{2p^4 - 4p^3 - 2p^2} \quad \leftarrow \text{คูณ } p^2 - 2p - 1 \text{ ด้วย } 2p^2 \\
 4p^3 - 3p^2 - p + 1 \\
 \underline{4p^3 - 8p^2 - 4p} \quad \leftarrow \text{คูณ } p^2 - 2p - 1 \text{ ด้วย } 4p \\
 5p^2 + 3p + 1 \\
 \underline{5p^2 - 10p - 5} \quad \leftarrow \text{คูณ } p^2 - 2p - 1 \text{ ด้วย } 5 \\
 13p + 6 \text{ เศษ}
 \end{array}$$

$$\therefore (2p^4 - 5p^2 - p + 1) \div (p^2 - 2p - 1) = 2p^2 + 4p + 5 \text{ เศษ } 13p + 6$$

4. การหารสังเคราะห์

เป็นการหารพหุนามที่รวดเร็วและมีข้อจำกัด คือ พหุนามที่เป็นตัวหาร ต้องมีดีกรี 1 คือ อยู่ในรูป $x - c$

ขั้นตอนในการหารสังเคราะห์

- จัดเรียงพจน์พหุนามที่เป็นตัวตั้งจากดีกรีมากไปน้อย พจน์ใดขาดหายไปเติม 0 พจน์นั้น
- นำเฉพาะสัมประสิทธิ์ของตัวหารมาตั้งหาร
- ตัวหาร นำเฉพาะค่า c มาหาร

ตัวอย่าง

1. จงหาร $2x^3 - 9 - 5x^2$ ด้วย $x - 3$

วิธีทำ เรียงพจน์ $(2x^3 - 5x^2 + 0x - 9) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 2 & -5 & +0 & -9 \\
 & & + & + & + \\
 \hline
 & 0 & 6 & +3 & +9 \\
 & & & & + \\
 \hline
 & 2 & 1 & 3 & 0
 \end{array}$$

$$\therefore \text{ผลหาร คือ } 2x^2 + x + 3$$

2. จงหาร $17 - 9x + 5x^2 - 3x^3$ ด้วย $3x - 5$

วิธีทำ $(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 17) \div (3x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \frac{5}{3} & -3 & +5 & -9 & +17 \\
 & & -5 & +0 & -15 \\
 \hline
 & -3 & 0 & -9 & 2
 \end{array}$$

$$\therefore \text{ผลหารคือ } \frac{-3x^2 + 0x - 9}{3} \text{ เศษ } 2 = -x^2 - 3 \text{ เศษ } 2$$



10. เศษส่วนของพหุนาม

เศษส่วนของพหุนาม หมายถึง เศษส่วนที่มีเศษเป็นพหุนามและส่วนเป็นพหุนามที่ไม่เท่ากับศูนย์

ถ้า A และ B เป็นพหุนามเรียก $\frac{A}{B}$ ว่า เศษส่วนของพหุนามที่มี A เป็นตัวเศษ และ B เป็นตัวส่วน โดยที่ $B \neq 0$

ตัวอย่าง เศษส่วนของพหุนาม เช่น $\frac{2x}{x^2 - 5}$ (เมื่อ $x^2 - 5 \neq 0$) หรือ $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 - x - 3}$ (เมื่อ $x^3 - x - 3 \neq 0$)

11. การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม

ถ้า A, B, C และ D เป็นพหุนาม โดยที่ $B \neq 0$ และ $D \neq 0$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$$

และ

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} \text{ เมื่อ } C \neq 0$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{2x-3} \div \frac{9x^5}{4x-6} &= \frac{3x^2}{2x-3} \times \frac{4x-6}{9x^5} \\ &= \frac{3x^2 \times 2(2x-3)}{(2x-3)(9x^5)} \\ &= \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

12. การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

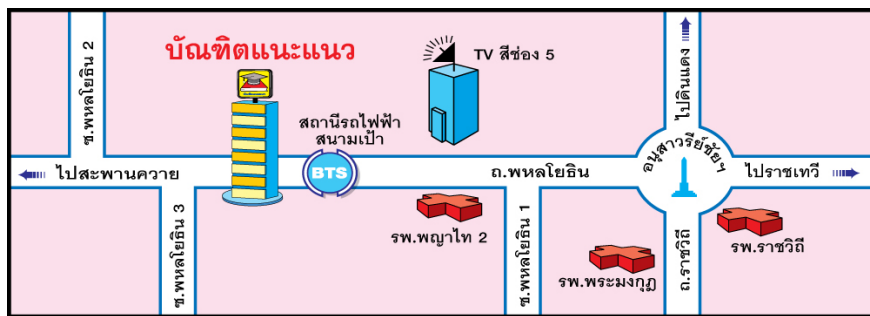
ใช้หลักการเดียวกันกับการบวกและการลบเศษส่วนของเลขจำนวนเต็ม กล่าวคือทำตัวส่วนให้มีความเท่ากันก่อน แล้วจึงนำตัวเศษมาบวกหรือลบกัน จากนั้นทำให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{(x-1)(x+3)} - \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} &= \frac{(3x-2)(x+2)}{(x-1)(x+3)(x+2)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{3x^2 + 6x - 2x - 4}{(x-1)(x+2)(x+3)} - \frac{x^2 + 3x - 3x - 9}{(x-1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(3x^2 + 4x - 4) - (x^2 - 9)}{(x-1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3x^2 + 4x - 4 - x^2 + 9}{(x-1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 5}{(x-1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

โปรดทราบ!

ตัวอย่างนี้จะโชว์เฉพาะหน้า 1-20 เท่านั้น
หากจะขอดูหนังสือทั้งเล่ม ต้องติดต่อที่
บัณฑิตแนะแนว (โทรศัพท์ 02-2794808)
หรือ ที่ร้านจำหน่ายหนังสือชั้นนำทั่วประเทศ



สำนักงานบัณฑิตแนะแนว 1033/4 ถ.พหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400

เวลาทำงาน 08.00-17.00 น. Website : www.bunditnaenaew.com

ฝ่ายประชาสัมพันธ์ เปิดทุกวัน (จันทร์-อาทิตย์) โทรศัพท์ 02-2794808 แฟกซ์ 02-6171820

ตรงตามหลักสูตรใหม่

ชุด TOP เป็นหนังสือสรุปเนื้อหาสำคัญ ของหลักสูตร ป.1-ม.3 ในแต่ละวิชาของแต่ละระดับชั้นพร้อมแบบฝึกหัดท้ายบท เหมาะสำหรับนักเรียนใช้อ่านทบทวนความรู้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อผลการสอบที่ยอดเยี่ยม จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 9 ชั้น ๆ ละ 5 วิชา คือ คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, ภาษาอังกฤษ, ภาษาไทย และสังคมศึกษา รวม 45 เล่ม ดังนี้



TOP ป.1-ป.3
ราคา 69 บาท



TOP ป.4-ป.6
ราคา 79 บาท



TOP ม.1-ม.3
ราคา 89 บาท

ชุด TEST เป็นหนังสือโจทย์แบบฝึกหัดเรียงตามบทเรียนแต่ละเรื่องของวิชานั้นๆ เหมาะสำหรับนักเรียนใช้ฝึกทำเพื่อทบทวนและพัฒนาความรู้ด้วยตัวเอง เพราะจะมีโจทย์ ที่ออกครอบคลุมทุกเรื่อง-ทุกประเด็น ครบถ้วนและพลิกแพลง ตั้งแต่ง่ายไปหายาก พร้อมเฉลยอย่างละเอียด จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 9 ชั้น ๆ ละ 5 วิชาคือ คณิตศาสตร์, วิทยาศาสตร์, ภาษาอังกฤษ, ภาษาไทย และสังคมศึกษา รวม 45 เล่ม ดังนี้



TEST ป.1-ป.3
ราคา 69 บาท



TEST ป.4-ป.6
ราคา 79 บาท



TEST ม.1-ม.3
ราคา 89 บาท

ชุด เตรียมสอบเข้าเรียนต่อ

เหมาะสำหรับนักเรียนชั้น ม.2-ม.3 เพื่ออ่านเตรียมสอบคัดเลือกเข้าเรียนต่อในแต่ละสถาบัน จัดพิมพ์ด้วยกระดาษปอนด์สีขาวอย่างดี แยกเป็น 3 เล่ม ดังนี้



ราคา 129 บาท



ราคา 199 บาท



ราคา 299 บาท

มีวางจำหน่ายที่ร้านหนังสือชั้นนำทั่วประเทศ หรือสั่งซื้อโดยตรงที่

บัณฑิตแนะแนว 25 ปีแห่งการแนะแนว
1033/4 ถนนพหลโยธิน สามเสนใน พญาไท กทม. 10400
โทรศัพท์ 02-2794808 และ 02-6195844-5 แฟกซ์ 02-6171820-1



กว่า 25 ปี ในวงการศึกษากับ 4 ผลงานคุณภาพ ที่สร้างสรรค์เพื่อเยาวชนไทย

1 ศูนย์จัดสอบทางวิชาการ



จัดสอบด้วยข้อสอบมาตรฐานพร้อมกันทั่วประเทศ โดยแบ่งการสอบออกเป็น 3 กลุ่มตามระดับการศึกษา คือ PRE-ประถมศึกษา (ป.3-ป.6), PRE-ม.ต้น (ม.1-ม.3) และ PRE-ADMISSIONS (ม.4-ม.6) เพื่อให้นักเรียนทราบระดับความสามารถทางวิชาการของตนเอง จนใช้เป็นแนวทางในการเลือกสถานศึกษาต่อและอาชีพได้อย่างเหมาะสม

2 ศูนย์ผลิตตำราและสำนักพิมพ์



ผลิตและจำหน่ายหนังสือคู่มือประกอบการเรียนตั้งแต่ประถม-มัธยมศึกษา ด้วยความโดดเด่นของเนื้อหาที่เข้าใจง่าย ตรงตามบทเรียนทั้งเล่มต้น-เล่มปลาย เพิ่มศักยภาพในการเรียนสำหรับทุกช่วงชั้น

3 ศูนย์กวดวิชาแนวใหม่



รูปแบบใหม่ของการกวดวิชาเปิดสอนตั้งแต่ระดับประถม-ม.ปลาย ดำเนินการสอนโดยทีมอาจารย์ชั้นนำของประเทศที่มีเทคนิคการถ่ายทอดความรู้ให้เข้าใจง่าย เน้นให้นักเรียนสนุกกับการเรียน พร้อมกระบวนการสอบ เพื่อวัดความรู้ตลอดหลักสูตรและมีเจ้าหน้าที่แนะแนวคอยดูแลอย่างใกล้ชิด

4 ศูนย์บริการด้านแนะแนว



การริเริ่มและบุกเบิกงานแนะแนวที่เปิดให้บริการแก่โรงเรียน ครู, ผู้ปกครอง และนักเรียนทั่วประเทศ กว่า 20 ปีที่ผ่านมาเป็นผลงานอีกด้านที่เราภูมิใจ ทั้งในเรื่องของการรวบรวมข้อมูล, ข่าวสาร และผลิตสื่อวัสดุต่างๆ ทางด้านแนะแนวออกเผยแพร่ รวมถึงการให้คำปรึกษาด้านแนะแนวฟรี

พิชคณิต คิดเพื่อชาติ

ISBN 978-974-613-731-7



ราคา 129 บาท